Kildecentreret matematikhistorie

Oversættelse af uddrag fra A.-L. Cauchys 'Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal'

12. september 2018

Den følgende oversættelse til dansk af uddrag fra AUGUSTIN-LOUIS CAUCHYS (1789–1857) 'Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal' (Cauchy, 1823) er et uddrag fra Andersen og Sørensen (2018).

Referencer

Andersen, Nils Byrial og Marianne Weye Sørensen (2018). „Cauchys integralregning". I: *Snows spøgelseskort, Halleys livsrenter og Cauchys integraler. Tre gode matematikhistorier*. Udg. af Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen. Matematiklærerforeningen. Kap. 4, s. 71–99.

Cauchy, A.-L. (1823). „Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal". I: *Œuvres Complètes d'Augustin Cauchy*. Bd. II.4. 12+15 bd. 2nd series. Paris: Gauthier-Villars, s. 9–261. aris: de l'imprimérie royale; 1823.

EN-OG-TYVENDE LEKTION

Bestemte integraler

Antag at funktionen $y = f(x)$ er kontinuert med hensyn til variablen x mellem to endelige grænser $x = x_0$ og $x = X$, og at man med $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ betegner nogle nye værdier af x fordelt mellem disse grænser, således at de altid vokser eller aftager fra den første grænse til den anden. Man kan bruge disse værdier til at inddele forskellen $X - x_0$ i elementerne

$$x_1 - x_0, \;\; x_2 - x_3, \;\; x_3 - x_2, \;\; \ldots, \;\; X - x_{n-1} \tag{1}$$

som alle vil have samme fortegn. Når det er gjort, forestiller man sig, at man multiplicerer hvert element med værdien af $f(x)$ svarende til *begyndelsen* af det samme element. Det vil sige, at elementet $x_1 - x_0$ multipliceres med $f(x_0)$, elementet $x_2 - x_1$ multipliceres med $f(x_1)$, osv. og endelig multipliceres elementet $X - x_{n-1}$ med $f(x_{n-1})$. Lad så

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \tag{2}$$

være summen af de således opnåede produkter. Størrelsen S vil klart afhænge af 1) antallet n af elementer, i hvilken man har inddelt forskellen $X - x_0$, og 2) af selve værdierne af disse elementer, og følgelig af den valgte inddeling. Men det er vigtigt at bemærke, at hvis de absolutte værdier af elementerne bliver meget små og tallet n meget stort, så vil valget af inddelingen ikke have mere end en ubetydelig indflydelse på værdien af S. Det er faktisk det, som man kan demonstrere på den følgende måde.

Hvis man antager, at alle elementerne i forskellen $X - x_0$ reduceres til en enkelt forskel, som vil være forskellen selv, så har man simpelthen

$$S = (X - x_0)f(x_0). \tag{3}$$

Når man derimod bruger udtrykkene (1) for elementerne for forskellen $X - x_0$, så er værdien S, som i dette tilfælde er bestemt af ligningen (2), lig med summen af elementerne multipliceret med et middeltal blandt alle koefficienterne

$$f(x_0),\ f(x_1), f(x_2),\ \ldots,\ f(x_{n-1})$$

(se forordet til Cours d'analyse, korrolar til den 3. sætning). Desuden, idet disse koefficienter har bestemte værdier af udtrykket

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

hvor værdierne af θ er indeholdt mellem nul og en, kan man ved ræsonnementer, ligesom dem vi brugte i syvende lektion, vise, at det middeltal, som vi er interesseret i, er en anden værdi af det samme udtryk, som svarer til en værdi af θ indeholdt mellem de samme grænser. Man kan derfor erstatte ligning (2) med det følgende:

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)], \tag{4}$$

hvor θ vil være et tal mindre end en.

For at komme fra den slags inddeling, som vi lige har betragtet, til en anden, i hvilken de absolutte værdier af elementerne i $X - x_0$ er endnu mindre, vil det være tilstrækkeligt at opdele hvert af udtrykkene i (1) i nye elementer. Så må man, på den anden [højre] side af ligning (2), bytte produktet $(x_1 - x_0)f(x_0)$ ud med en sum af lignende produkter, for hvilken man kan substituere et udtryk på formen $(x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)]$, hvor θ_0 er et tal mindre end en, idet man mellem denne sum og produktet $(x_1 - x_0)f(x_0)$ vil have en relation ligesom den, der eksisterer mellem værdierne af S givet ved ligning (4) og (3). Af den samme grund kan man erstatte produktet $(x_2 - x_1)f(x_1)$ med en sum af termer, der kan repræsenteres på formen

$$(x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)],$$

hvor θ_1 igen betegner et tal mindre end en. Ved at fortsætte på denne vis vil man ende med at konkludere, at med den nye måde at inddele på vil værdien af S være på formen

$$\begin{aligned} S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \\ \cdots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \end{aligned} \tag{5}$$

Hvis man i den sidste ligning sætter

$$\begin{aligned} f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] &= f(x_0) \pm \epsilon_0, \\ f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] &= f(x_1) \pm \epsilon_1, \ldots \\ f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] &= f(x_{n-1}) \pm \epsilon_{n-1}, \end{aligned}$$

så vil man ud af det få

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \epsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \epsilon_1] + \cdots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \epsilon_{n-1}], \tag{6}$$

som, idet man ganger produkterne ud, giver

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$
$$\pm \epsilon_0(x_1 - x_0) \pm \epsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \epsilon_{n-1}(X - x_{n-1}). \quad (7)$$

Vi tilføjer, at hvis elementerne $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ X - x_{n-1}$ har meget små absolutte værdier, så vil hver af størrelserne $\pm\epsilon_0, \pm\epsilon_1, \ldots, \pm\epsilon_{n-1}$ kun afvige meget lidt fra nul, og derfor vil det samme gælde for summen

$$\pm\epsilon_0(x_1 - x_0) \pm \epsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \epsilon_{n-1}(X - x_{n-1}),$$

som er ækvivalent med produktet af $X - x_0$ og et middeltal af de forskellige størrelser. Når det er sagt, så følger det ved sammenligning af ligningerne (2) og (7), at man ikke ændrer værdien af S nævneværdigt, hvis man går fra en inddeling, i hvilken elementerne i forskellen $X - x_0$ har meget små absolutte værdier, til en anden inddeling, i hvilken hvert af elementerne er opdelt i flere andre.

Lad os nu forestille os at man på samme tid betragter to inddelinger af forskellen $X - x_0$, hvor elementerne i forskellen i begge inddelinger har meget små absolutte værdier. Man kan sammenligne disse to inddelinger med en tredje, der er valgt, således, at hvert element, enten fra den første eller den anden inddeling, er dannet af en forening af flere elementer fra den tredje. For at denne betingelse er opfyldt, er det nok at alle de værdier af x, som er indskudt i de første to inddelinger mellem grænserne x_0 og X, [også] er anvendt i den tredje, og man kan bevise, at man kun ændrer værdien af S meget lidt ved at gå fra den første eller den anden inddeling til den tredje, og følgelig når man går fra den første til den anden. Derfor, når elementerne i forskellen $X - x_0$ bliver uendeligt små, så har inddelingen ikke mere end en ubetydelig indflydelse på værdien af S; og hvis man lader de absolutte værdier af elementerne aftage uendeligt, ved at øge deres antal, vil værdien af S ende med så godt som at være konstant, eller med andre ord: den vil ende med at opnå en bestemt grænse, som udelukkende afhænger af formen af funktionen $f(x)$ og ekstremerne x_0 og X, som variablen x løber imellem. Denne grænse er, hvad man kalder et bestemt integral.

Bemærk nu at hvis man med $\Delta x = h = dx$ betegner en endelig tilvækst i variablen x, så vil de forskellige termer, som S er opbygget af, såsom produkterne $(x_1 - x_0)f(x_0)$, $(x_2 - x_1)f(x_1)$, osv., være indeholdt i den generelle formel

$$hf(x) = f(x)\,dx, \quad (8)$$

fra hvilken man kan udlede dem en for en ved først at sætte $x = x_0$ og $h = x_1 - x_0$, så $x = x_1$ og $h = x_2 - x_1$, osv. Man kan derfor sige, at størrelsen S er en sum af produkter magen til udtrykket (8); dette er, hvad man nogle gange udtrykker ved hjælp af symbolet Σ ved at skrive

$$S = \Sigma hf(x) = \Sigma f(x)\Delta x. \quad (9)$$

Med hensyn til det bestemte integral mod hvilket størrelsen S konvergerer, når elementerne i forskellen $X - x_0$ bliver uendeligt små, er det bekvemt at repræsentere det med notationen $\int hf(x)$ eller $\int f(x)\,dx$, i hvilken det, at bogstavet $\int$ erstatter bogstavet Σ, indikerer, at man ikke længere har en sum af produkter magen til udtrykket (8), men en grænse af en sum af denne slags. Ydermere, eftersom værdien af det bestemte integral, som man betragter, afhænger af de ekstreme værdier x_0 og X for variablen x, så er det bekvemt at placere disse to værdier, den første under og den anden over bogstavet $\int$, eller at skrive dem ved siden af integralet, som man altså betegner med en af notationerne

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Den første af disse notationer, som er opfundet af Monsieur Fourier, er den simpleste. I det specialtilfælde, hvor funktionen $f(x)$ er erstattet af en konstant størrelse a, finder man, uanset inddelingen af forskellen $X - x_0$

$$S = a(X - x_0),$$

og man konkluderer heraf

$$\int_{x_0}^{X} a\,dx = a(X - x_0). \tag{11}$$

Hvis man i den sidste formel sætter $a = 1$, så får man

$$\int_{x_0}^{X} dx = X - x_0.$$

[...]

TRE-OG-TYVENDE LEKTION

[...] Geometrisk repræsentation af reelle, bestemte integraler [...]

[...] Antag nu at grænsen X er større end x_0, og at funktionen $f(x)$ er positiv fra $x = x_0$ til $x = X$, at x, y betegner rektangulære koordinater, og at A er arealet afgrænset af x-aksen og kurven $y = f(x)$ i én retning, og af ordinaterne $f(x_0)$ og $f(X)$ i den anden. Dette areal, som har grundlinjen $X - x_0$ på x-aksen, vil være et middeltal mellem arealerne af to rektangler konstrueret på basen $X - x_0$ med højder lig henholdsvis den mindste og den største af ordinaterne rejst fra forskellige punkter på denne base. Det vil derfor være ækvivalent med et rektangel konstrueret på en middelordinat [altså en ordinat, som er et middeltal mellem de givne ordinater] repræsenteret af et udtryk på formen $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; således vil man have at

$$A = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)], \tag{8}$$

hvor θ betegner et tal mindre end en. Hvis man deler basen $X - x_0$ ind i meget små elementer $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ X - x_{n-1}$, vil arealet A være delt i tilsvarende elementer, hvis værdier vil være givet af ligninger som formel (8). Man vil derfor endvidere have

$$\begin{aligned} A = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \\ \cdots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})], \end{aligned} \tag{9}$$

hvor $\theta_0,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_{n-1}$ betegner tal mindre end en. Hvis man i denne sidste ligning lader de absolutte værdier af elementerne af $X - x_0$ aftage uendeligt, så vil man ved at gå til grænserne opnå

$$A = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx. \tag{10}$$