# Opgaver hørende til Cauchys integralregning

Nils Byrial Andersen og Marianne Weye Sørensen (2018). „Cauchys integralregning“. I: *Snows spøgelseskort, Halleys livsrenter og Cauchys integraler. Tre gode matematikhistorier*. Udg. af Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen. Matematiklærerforeningen. Kap. 4, s. 71–99



**Opgave 4.1 (Pararbejde om kildens kontekster).**
Den centrale kilde er Augustin-Louis Cauchys (1789–1857) forelæsninger over integralbegrebet taget fra hans *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* (Cauchy, 1823).

1. Lav en liste over nogle nøgleord om kilden, dens forfatter og kontekst og dens indhold. Tænk på alle de begreber, personer og steder, som du har brug for hjælp til at forstå.
2. Skriv jeres nøgleord op på tavlen eller i et fælles dokument eller padlet. Skynd jer! Hvert nøgleord skal kun stå en gang.
3. Fordel nøgleordene mellem jer og brug bøger, internettet eller jeres historielærer til at søge oplysninger.
4. Skriv svarene ned (husk præcise kildeangivelser) og del dem med jeres klassekammerater. Husk at medtage flere forskellige perspektiver på kilden, husk at forholde jer kritisk til oplysningerne, og husk at strukturere og formulere jeres forklaringer, så de kan læses af andre.

**Opgave 4.2.**
Vi kalder arealet mellem $x$-aksen og grafen for $f$ fra $x = 1$ til $x = 6$ for $S$.

1. Læg arealerne af de skraverede rektangler i figur 4.2 sammen og beregn hermed et estimat for arealet $S$.

2. Er arealet af rektanglerne mindre end eller større end det faktiske areal under kurven? Med andre ord: Er der tale om et underestimat eller et overestimat?

**Opgave 4.3.**
Hvor stort er det skraverede areal i figur 4.3?

**Opgave 4.4.**

1. Hvad er foreningsmængden af de to inddelinger i figur 4.2 og figur 4.3?
2. Hvad er venstresummen $S_3$, som hører til denne inddeling?
3. Sammenlign de tre estimater $S_1,\ S_2,\ S_3$. Hvad bemærker du? Hvad tror du vil ske med estimaterne for $S$, hvis vi laver inddelingen finere og finere?

**Opgave 4.5.**

1. Bestem $f(x_m)$ ud fra ligningen $(6-1)\cdot f(x_m) = 28{,}125$.
2. Bestem $x_m$. Brug evt. et CAS-værktøj.
3. Indtegn arealet $(X - x_0)\cdot f(x_m)$ på figuren.

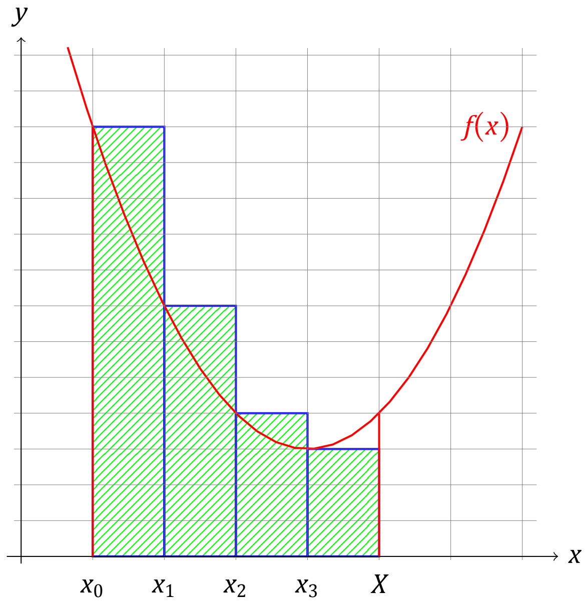
**Opgave 4.6.**
Bestem venstresummerne og middeltallene, som opstår ved at indskyde midterpunkterne i de øvrige intervaller.

**Opgave 4.7.**

1. Brug et CAS-værktøj til at udregne $\int_1^6 (x^2 - 8x + 19)\,dx$. Dette er den *eksakte* værdi af arealet mellem grafen og $x$-aksen, fra $x = 1$ til $x = 6$.
2. Indtegn dette areal på figuren, og forklar ud fra figuren, hvordan opdelingen i flere og flere intervaller fører til det bestemte integral.
3. Beregn og sammenlign de procentvise afvigelser mellem den eksakte værdi for $S$ og de tre estimater i opgaverne 4.2, 4.3 og 4.4. Hvad bemærker du?
4. I disse opgaver har vi set på en bestemt funktion. Diskutér med sidemanden om metoden kan overføres til andre funktioner. Skal vi evt. stille særlige krav til funktionerne? Hvor skal de krav bruges?

**Opgave 4.8.**
CAUCHY benyttede en generel version af nogle af de beregninger, vi har lavet ovenfor (afsnit 4.4).

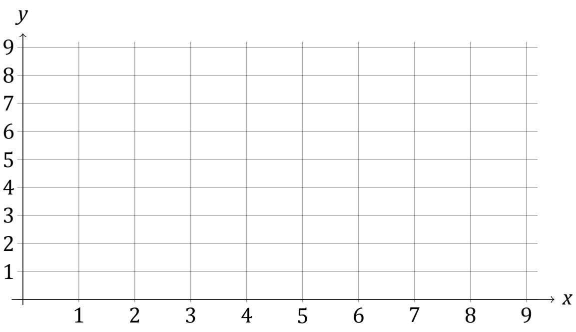
Antag at punkterne $x_0$ og $X$ er markeret på $x$-aksen. De mellemliggende punkter $x_1,\ x_2,\ x_3$ er også indtegnet.




1. Forklar hvorfor højden af det første rektangel er $f(x_0)$ og bredden er $(x_1 - x_0)$.
2. Opskriv et udtryk for arealet af det første rektangel.
3. Opskriv et udtryk for summen af alle rektanglerne.
4. Hvad repræsenterer dette udtryk?

**Opgave 4.9.**

1. Tegn en skitse af en kontinuert funktion.




2. Indtegn grænserne $x_0$ og $X$ og tre mellemliggende inddelinger $x_1,\ x_2,\ x_3$.
3. Er der flere muligheder?
4. Hvad er $X - x_0$ på tegningen?
5. Hvad er $x_1 - x_0$, osv. på din tegning? Hvorfor har de samme fortegn?

**Opgave 4.10.**

1. Find $f(x_0)$ på din tegning.
2. Hvad er $(x_1 - x_0) \cdot f(x_0)$ på din tegning? Tegn det!
3. Tegn de tilsvarende elementer.
4. Hvad er $S$ for en sum?
5. Hvad har indflydelse på størrelsen af $S$? Hvorfor/hvordan?
6. Hvad er $S$ en tilnærmelse til?

**Opgave 4.11.**
Tegn situationen i (3).

**Opgave 4.12.**
Vi kan prøve at overbevise os om eksistensen af og egenskaberne ved dette middeltal således:

1. Betragt de fire rektangler på din tegning. Hvad er deres samlede areal?
2. Kan vi tegne ét rektangel med samme grundlinje og samme areal? Gør det!

Højden af det nye rektangel kalder vi $f(x_m)$, og det er det middeltal, CAUCHY omtaler.

3. Find $x_m$ på din tegning.

Bemærk at $x_m$ ligger i intervallet $[x_0,X]$. Dette gælder generelt, da det er en konsekvens af integralregningens middelværdisætning.

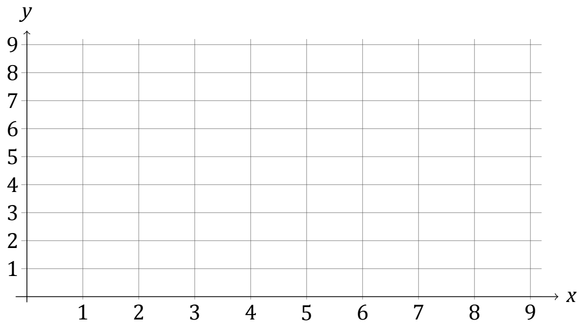
**Opgave 4.13.**
Vi vil undersøge, hvad udtrykket $f(x_0 + \theta(X - x_0))$ betyder ved at betragte et eksempel.

1. Vælg fx $x_0 = 2$ og $X = 5$.
2. Beregn $x_m = x_0 + \theta(X - x_0)$ for forskellige værdier af $\theta$. Husk $0 < \theta < 1$.
3. Tegn $x_m$'erne på en tallinje.
4. Hvad betyder $f(x_m) = f(x_0 + \theta(X - x_0))$ mon så?

**Opgave 4.14.**
Tegn situationen i (4) på samme tegning som situationen i (3).

**Opgave 4.15.**

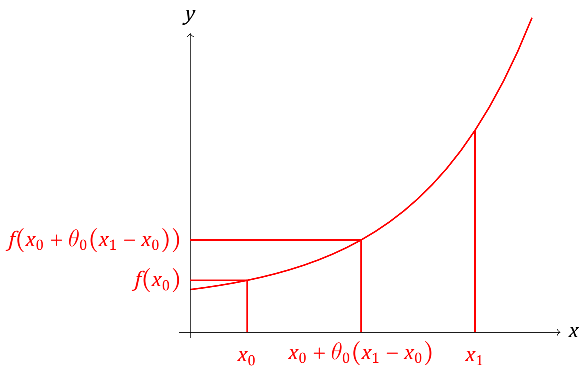
1. Hvad mener CAUCHY med at opdele hvert af udtrykkene i (1) i nye elementer?
2. Tegn grafen for din funktion, grænser og inddeling igen. Marker en underinddeling i første interval.




3. Hvordan ville $S$ se ud i blot dette interval?
4. Overvej om man i dette interval kan gøre det samme, som vi så i (4).
5. Hvordan ville $S$ så se ud i blot dette interval?
6. Hvad betyder udtrykket i (5)?

**Opgave 4.16.**

1. Hvad betyder $f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \epsilon_0$? Se på tegningen. $\epsilon_0$ er blot et (lille) tal af en passende størrelse. Hvor skal $\epsilon_0$ være på tegningen?




2. Udregn $(x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \epsilon_0]$ ved at gange første parentes ind i firkantparentesen.

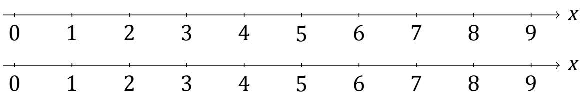
3. Sammenlign (6) og (7).

**Opgave 4.17.**

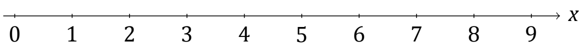
1. Hvorfor vil $\pm\epsilon_0, \pm\epsilon_1, \ldots, \pm\epsilon_{n-1}$ kun afvige meget lidt fra nul, hvis $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ X - x_{n-1}$ har meget små absolutte værdier?
2. Hvorfor er $\pm\epsilon_0(x_1 - x_0) \pm \epsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \epsilon_{n-1}(X - x_{n-1}) \approx 0$?
3. Sammenlign (2) og (7).

**Opgave 4.18.**

1. Tegn intervallet $[x_0, X]$ og inddel det i fx fem små stykker. Lav en anden tegning og inddel af det samme interval i fx fire stykker.




2. Tegn foreningsmængden af de to inddelinger på en tredje tegning, så der nu er op til ni stykker.




3. Indse at den tredje inddeling er en finere inddeling af både den første og den anden inddeling.

Værdien af $S$ er således kun ændret lidt fra den første inddeling til den tredje inddeling, og værdien af $S$ er kun ændret lidt fra den anden inddeling til den tredje inddeling.

4. Hvordan må det så forholde sig med værdien af S, når man sammenligner inddeling 1 og 2?

Og endelig:

5. Beskriv hvordan din tegning er relateret til konstruktionen af det betemte integral.

**Opgave 4.19.**

1. Forklar forskellen på at bruge de to tegn $\sum$ og $\int$.

**Opgave 4.20.**

1. Tegn grafen for funktionen $f(x) = a$ i et koordinatsystem.

2. Sammenlign $S$ og det bestemte integral.

**Opgave 4.21.**

1. Tegn funktionen i dette tilfælde.
2. Sæt $a = 1$ ind i $S = a(X - x_0)$ og i (11). Hvad finder du?

**Opgave 4.22.**

Vælg en funktion $f$, fx et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, og et interval $[x_0, X]$, hvor funktionen er positiv. Brug din viden om andengradspolynomier i stedet for blot at prøve dig frem. Lad $n = 5$ og vælg $x_1,\ x_2,\ x_3$ og $x_4$.

1. Beregn $S$ for denne inddeling.
2. Vælg en anden inddeling og beregn $S$ for denne.
3. Lav foreningen af de to inddelinger og beregn $S$ for denne inddeling.
4. Find $x_m$ således at $(X - x_0) \cdot f(x_m) = S$ som omtalt i afsnit 4.5.
5. Beregn $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$.