Elementær kompleks funktionsteori hos Weierstrass
Et studie i resultater og metode

HENRIK KRAGH SØRENSEN

Afløsningsopgave i kurset
De uendelige rækkers historie
IVH efteråret 1994.

17. januar 1995.
Uændret version 29. juni 2001.

Resumé

Jeg takker Kirsten Stentoft for hjælp til korrekturlæsning og Thomas Britz for korrekturlæsning og gode forslag.

Indhold

1 Indledning

Den komplekse funktionsteori ses traditionelt som værende opbygget af tre personer: Cauchy, Riemann og Weierstrass. Den mest primære indgang til Weierstrass' basale begreber inden for dette område er hans forelæsninger om analytiske funktioner. I denne opgave skal vi give et survey over, hvad Weierstrass forelæste for sine studerende omkring analytiske funktioner. Vi vil tage nogle af hans centrale definitioner og sætninger ud og gennemgå dem i større detaljer, og vi skal derefter diskutere vekselsvirkninger med resten af den matematiske verden, i særdeleshed Riemann. Vi skal se på det modsætningsforhold mellem disse to store matematikere og deres teorier, som eftertiden hårdnakket har hævdet, og det er en af denne opgaves teser, at ihvertfald det menneskelige modsætningsforhold er noget, netop eftertiden har skabt. Vi skal i løbet af opgaven flere gange vende tilbage til Weierstrass' meget høje krav om stringens, idet det synes at have været en af de bærende kræfter bag hans matematiske arbejde.

Jeg har tilsigtet, at denne opgave skal kunne læses af fornuftige folk, som har fået en indføring i analysen svarende til det første år på universitetet. Erfaringer eller overvejelser omkring komplekse funktioner er bestemt ikke nogen hæmsko, men jeg håber og tror, at denne opgave kan formidle andet og mere end blot resultater. Derfor er det matematiske niveau ikke så centralt; indgående kendskab til den bagvedliggende historie ikke heller, da jeg vil forsøge at præsentere den nødvendige viden.

2 Biografiske data og data om forelæsningerne

2.1 Biografiske data

Karl T. W. Weierstrass (1815-1897) blev først i en alder af 40 år ansat ved universitetet i Berlin i 1856, hvor han i løbet af de næste årtier skulle komme til at holde en række forelæsninger med indflydelse på matematikhistoriens udvikling. Forud var gået en habilitation (afgangseksamen) fra Münster, hvor han havde studeret under Gudermann, og 13 år som gymnasielærer i Vest-Preussen og Braunsberg. Weierstrass fik et sammenbrud på grund af overbelastning i 1861 og var væk fra det videnskabelige miljø indtil vinteren 1862-63. Han måtte dog resten af sit liv holde forelæsninger siddende. I 1873/74 blev han rektor for universitetet i Berlin, og på hans 70 års fødselsdag prægedes en medalje til hans ære. Han døde i 1897 som medlem af adskillige akademier og indehaver af adskillige akademi-medaljer.

2.2 Forelæsningerne

Da han endelig ansættes i Berlin, afholder han en turnus på 4 forelæsningsserier:

1. Indledning i teorien om de analytiske funktioner

2. Elliptiske funktioner

3. Abelske funktioner

4. Variationsregning hhv. Anvendelse af de elliptiske funktioner

Det er hovedsageligt den første af disse forelæsninger, vi i denne opgave skal studere.

Meningen med forelæsningsrækken var at oprette en indre konsistens. Således skal forelæsning 1 ses som indledning og baggrund for forelæsning 2 etc. Og hver sætning skal bevises ved henvisninger til resultater, man allerede har bevist. Dette er derfor et tidligt eksempel på den matematik, vi også dyrker idag, hvor hvert modul skal være i lukket konsistens. Der er dermed også sket en ændring i retningen af matematik for matematikkens skyld og, som Kneser skriver (Remmert 1991, p. 420-421), trak hans forelæsninger om elliptiske funktioner fulde huse, selvom det ikke var helt klart, hvad man skulle bruge det til.

Denne turnus gentoges om og om igen, og ialt har 'Indledning i teorien om de analytiske funktioner' været afholdt 12 gange.

2.3 Udgivelser

Weierstrass' udgivelser er i omfang voldsomt begrænsede af to grunde. I starten befandt han sig udenfor det miljø, hvorfra det er nemmest at få publiceret sit materiale. Og da han endelig ansættes ved universitetet, er denne undskyldning erstattet med, at hans tid bruges på forelæsninger og forskning i stedet for skriftlig formidling. Mange har hævdet, at Weierstrass havde aversioner mod at udgive sine resultater, men begrundelsen er nok snarere, at hans teori hele tiden undergik en grundig kritik og udvikling.

Hans egne udgivelser omfatter kun nogle få artikler udgivet umiddelbart efter deres udfærdigelse. Resten er først udgivet i hans samlede værker i 1894. De samlede værker var planlagt til at fylde 10 bind, hvoraf bind 10 skulle udgøres af 'Indledning i teorien om de analytiske funktioner'. Man nåede dog aldrig længere end til bind 7, hvorfor Weierstrass' egne noter til forelæsningerne ikke er publiceret - og vel i dag ikke længere eksisterer. De artikler, Weierstrass publicerede (og som blev samlet på bogform af J. Springer i 1886), indeholder ligesom ungdomsarbejderne kimen til en funktionsteori, men denne er ikke sammenhængende - hverken i indhold eller udgivelse. Da Weierstrass heller aldrig har udgivet en lærebog, er vi derfor overladt til andres optegnelser fra hans forelæsninger. Blandt de vigtigste artikler i hans produktion indenfor funktionsteorien er "Zur Theorie der Potenzreihen" fra 1841, som dog ikke er udgivet før i de samlede værker.

At Weierstrass ikke selv udgav lærebøger byggende på hans forelæsninger, åbnede muligheder for, at andre gjorde det. Det var ikke dem alle, der havde held med dette forehavende. F.x. udgav O. Biermann i 1887 en bog med titlen "Theorie der analytischen Funktionen", som indeholder passagen "Der plan dieses Werkes ist Herrn Weierstrass bekannt", selvom han aldrig havde overværet Weierstrass' forelæsninger. Hans bog bygger således på andres noter, og har iflg. Itzigsohn intet med Weierstrass' teori at gøre. Weierstrass beskriver Biermanns ideer om at udgive en lærebog i emnet i et brev til Schwartz, hvori det hedder: "Ich antwortete ihm, daß er sich wohl eine zu schwierige Aufgabe gestellt habe, die ich selbst zur Zeit noch nicht zu lösen getraute" (Remmert 1991, p. 429).

2.4 Afskrifterne

Man har kendskab til ialt 19 forskellige afskrifter fra Weierstrass' forelæsninger om 'Indledning til teorien om de analytiske funktioner'. Af disse 19 afskrifter er blot 2 udgivet i deres helhed, mens der forefindes 40 fotokopier af en af de andre. Resten er ikke tilgængelige i deres fulde omfang for almindelig interesserede og værnes tilsyneladende af de institutioner, der opbevarer dem. De to offentliggjorte afskrifter er (Weierstrass 1986) og (Weierstrass 1988) fra henholdsvis Killing 1868 og Hurwitz 1878. Nogle få af de øvrige afskrifter findes dog citeret i længere eller kortere uddrag i forskellige lærebøger og artikler.

Omkring kvaliteten af afskrifterne fremhæver Ullrich specielt et ikke-udgivet afskrift forfattet af Hettner i 1874, idet Hettner af Weierstrass blev udpeget til at redigere bind 4 af de samlede værker. Også Hurwitz' afskrift bliver fremhævet, idet Weierstrass og Hurwitz beviseligt har diskuteret dette eller andre afskrifter (Ullrich 1989, p. 149).

Det er selvfølgelig beklageligt, at den eneste tilgængelige primær-litteratur til forelæsningerne er 2 afskrifter, når man ved, at der ialt findes 19. Man kan kun håbe, at flere af disse vil blive gjort tilgængelige for almindelige mennesker i matematisk-historiske miljøer ude omkring, f.x. i forbindelse med 100-året for hans dødsdag.

De biografiske oplysninger stammer fra (Remmert 1991, p. 420-421) og (Ullrich 1989). Fra den sidstnævnte stammer også data om forelæsningerne og afskrifterne.

3 Kritik af afskrifterne som kilder

At den mest primære litteratur, vi har om Weierstrass' funktionsteori, som skulle få så stor indflydelse i de følgende årtier, er afskrifter fra hans forelæsninger, er selvfølgelig bedrøveligt. Men på den anden side giver det os en enestående chance for at bedømme hans - ifølge overleveringen - geniale pædagogik. Men kilderne kommer i højere grad til at repræsentere, hvad hans skole mente og tænkte om kompleks funktionsteori end, hvis vi havde hans egne gennemarbejdede værker. Derudover indsniger der sig nogle gevaldige fejlkilder, idet han fra 1863 heller ikke selv førte kridtet på tavlen. Dermed er vores kilder altså allerede mindst en 2. hånds nedskrivning af forelæserens ord. På den anden side må man sige, at kilderne er meget tro mod hinanden og mod den øvrige overlevering af "Weierstrass' metode og notation". Der er nogle steder, hvor nedskrivningsfejl og simple fejl er at finde, men disse skal vi selvfølgelig ikke forfølge her, hvor det nærmere drejer sig om de overordnede linier og den bagvedliggende teori.

Den tidligste af de tilgængelige afskrifter (Weierstrass 1986) af Killing er ikke helt fuldendt. Den indeholder dog en bredere introduktion til matematik end den senere (Weierstrass 1988) af Hurwitz, som er mere målrettet i sin udvikling henimod analytiske funktioner. F.x. indeholder Killings afskrift Taylors sætning for n

gange differentiable funktioner i almindelighed (Weierstrass 1986, p. 45+), mens denne sætning i Hurwitz' afskrift kun findes for potensrækker.

At Killings afskrift ikke er fuldendt, rejser dog et andet problem. Vi kan nemlig ikke konkludere, at Weierstrass ikke har kendt - endsige ikke har forelæst over - ting, der ikke er at finde i Killings afskrift. Dermed er Killings afskrift i højere grad en positiv kilde, der kun kan bruges til at påvise kendskab til de omtalte emner.

Hurwitz' afskrift er derimod mere fuldendt. Den udgør både i reproduktionen og i indholdet en mere samlet enhed. Derfra kan vi selvfølgelig stadig ikke påvise ikke-kendskab, men den større indre sammenhæng og mere målrettede udvikling af resultater giver et mere fuldstændigt billede.

Da denne opgave primært skal beskæftige sig med Weierstrass og hans koncept om analytiske funktioner, vil det blive mere på grundlag af Hurwitz' afskrift, mens Killings mest vil blive brugt til paralleller og selvfølgelig til de relevante steder.

4 Resumé af den første del af forelæsningerne

4.1 Talbegreber

Weierstrass' forelæsninger synes at være tænkt til at hvile i sig selv. Han stræber efter en indre stringens i forelæsningerne, hvilket er grunden til, at hans første forelæsning i serien må inddrage selve tallenes fundament. Forelæsningerne til 'Indledning i teorien om de analytiske funktioner' starter således med en gennemgang af tallene og deres egenskaber. Disse afsnit er næsten uforandrede gennem de mange afskrifter. Dermed er den konstruktion, Weierstrass har lært før 1868, altså bestandig nok til at holde igennem resten af århundredet. Han starter med gennem en historisk begrundelse at indføre, hvad han kalder komplekse tal. Dette er ikke moderne komplekse tal, men tal bestående af flere enheder. Da han så indfører de naturlige tal og deres operationer, kan han ved at betragte ægte brøker konstruere de rationelle tal, og først derefter indfører han negative tal. Nu bruger han konvergens af rækker til at udvide til de reelle tal, og derefter ved parallelforskydning med i opnår han de komplekse tal. Denne konstruktion kendes idag som Det gaussiske Tallegeme. Han skelner mellem en geometrisk og en algebraisk indførelse og fremfører begge. Når tallene er defineret, indfører han operationer på dem og uendelige rækker og produkter af dem.

4.2 Grundlag

4.2.1 Weierstrass om funktionsbegrebet

Weierstrass citerer Bernoulli's funktionsdefinition og forkaster den, idet han siger, at derfra kan man ikke udlede resultater. Han siger da, at når man har kunnet udlede relevante resultater indenfor funktionsteorien på grundlag af Bernoulli's definition, så skyldes det, at man har antaget andre egenskaber. Han udviser herefter kendskab til forskellen mellem kontinuitet og differentiabilitet, idet han angriber Bertrand for at hævde, at enhver kontinuert funktion er differentiabel. En misforståelse, som også Cauchy har delt.

Weierstrass omtaler nu det historiske forløb omkring indførelsen af komplekse argumenter. Han påpeger, at man blot har udvidet reelle funktioner til komplekse argumenter og så til husbehov eftervist de egenskaber, man ved gælder i det reelle tilfælde. Dette giver ham endnu en grund til at forkaste Bernoulli's funktionsbegreb, idet han hævder, at der findes funktioner, som ikke kan udvides til hele talområdet. Her møder vi hans første brug af ordet analytisk:

> Und in der That giebt es auch Funktionen (in Bernoullis Sinn), welche keine Erweiterung zulassen - nicht analytische. Solche, deren Definition auf das ganze Zahlengebiet zu erweitern möglich ist, heißen analytische. (Weierstrass 1988, p. 49)

Han indfører nu Cauchy-Riemann-ligningerne for en funktion $f(u+vi) = p+qi$:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u} \qquad \frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{\partial q}{\partial v} \tag{1}$$

og siger, at disse differentialligninger kan bruges til at indføre analytiske funktioner. De beskriver nemlig netop disse. Men han påpeger, at de hviler på differentiabilitet af funktionen, hvorfor han synes, det er en uegnet måde at indføre analytiske funktioner på. Dette findes uddybet og spiddet i et meget citeret brev til Schwartz fra 1875, idet det indeholder hans primære anke mod Riemanns teori:

> Je mehr ich über die Principien der Functionentheorie nachdenke - und ich thue dies unablässig -, um so fester wird meine Überzeugung, dass diese auf dem Fundamente einfacher algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss, und dass es deshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraischer Sätze das "Transcendente", um mich kurz auszudrücken, in Anspruch genommen wird - so bestechend auch auf den ersten Anblick z.B. die Betrachtungen sein mögen, durch welche Riemann so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraischer Functionen entdeckt hat. (Dass dem Forscher, so lange er sucht, jeder Weg gestattet sein muss, versteht sich von selbst; es handelt sich nur um die systematische Begründung.) (Neuenschwander 1981b, p. 233)

Disse overvejelser findes ikke i (Weierstrass 1986).

I de følgende afsnit behandler Weierstrass rationelle funktioner (polynomier eller kvotienter mellem to polynomier) og viser bla. deres kontinuitet. Til dette bevis bruges den ϵ-δ-notation, som senere er blevet så bredt antaget som den stringente vej og knyttet til hans navn.

4.2.2 Uniform konvergens

Nu indfører Weierstrass uniform (ligelig) konvergens, som vi idag ser det, og viser, at under antagelse af uniform konvergens vil en række af kontinuerte funktioner igen have en kontinuert grænsefunktion. Cauchy havde antaget, at dette var tilfældet under alle omstændigheder (Cauchy 1821, p. 120), og Abel havde påvist et modeksempel herpå (Dybwad 1902, p. 316). Andre havde gjort udmærkede forsøg på at beskrive den tilstrækkelige egenskab, og forskellige behandlinger af uniform konvergens fandtes allerede, men det er Weierstrass' formulering, vi bruger den dag i dag. Disse argumenter findes kun i Hurwitz-afskriften.

4.2.3 Continuum

I begge de tilgængelige afskrifter laver Weierstrass nogle overvejelser omkring det, vi idag betragter som mængde-topologi, altså definitioner af indre, ydre og rand-punkter. Han betegner med et continuum, hvad vi idag ville kalde en åben mængde. Det er således en utraditionel brug af ordet continuum, som ellers er knyttet til de reelle tal. Det er en meget tidlig mængdeteoretisk beskrivelse af disse topologiske fænomener, men den må vel være umiddelbart tilgængelig med det nye mængdebegreb og intuitionen fra $\mathbb{R}^n$.

Litteraturen anvendt i dette kapitel er (Ullrich 1989) og kilderne (Weierstrass 1986) og (Weierstrass 1988).

5 Weierstrass om potensrækker

5.1 Konvergenskriterier

I Hurwitz' afskrift er det Weierstrass' intention hurtigst muligt at nå til en teori for analytiske funktioner, som er uafhængig af spørgsmålet om differentiabilitet. Den angrebsvinkel, han vælger, og som senere er blevet knyttet sammen med hans navn indenfor funktionsteorien, er at gå over potensrækker og potensrækkeudviklinger. Han har faktisk allerede i 1841 uafhængigt fundet den sætning, vi idag associerer med Laurents navn, idet det var ham, der publicerede den først i 1843. Weierstrass' opdagelse skete, mens han ikke havde adgang til universiteternes publikationsmekanismer, og blev derfor først offentliggjort i hans samlede værker i 1894.

Weierstrass' behandling af potensrækker begyndes i begge afskrifter med hans fundamentale sætning om deres konvergens. Han etablerer nemlig følgende resultat

> Bleiben die Glieder $a_0, a_1x, a_2x^2, \cdots$ in inf. einer Potenzreihe für $x = x_0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als eine angebbare Größe g, so ist die Potenzreihe für alle $|x| < |x_0|$ convergent (Weierstrass 1988, p. 63)

Denne sætning viser han ved hjælp af summationsformlen for en kvotientrække i begge afskrifterne. Beviset synes også i dag at være helt stringent. Endvidere bygger hans bevis på, at han kan vise, at summen af de absolutte størrelser er endelig. Derfra kan han så konkludere, at rækken konvergerer ved hjælp af f.x. følgende udsagn:

> $\sum a$ ist ausführbar, sobald die Summe von beliebig vielen der Größen a ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer angebbaren Größe bleibt. (Weierstrass 1988, p. 40)

Nu kommer så i denne afskrift hans afsnit om topologi, indre og ydre punkter etc. i speciel tilknytning til konvergensområder for potensrækker. Han påpeger helt i overensstemmelse med Abels værker, at enhver potensrække konvergerer i det indre af dens konvergensområde, men at denne konvergens ikke er sikret på randen.

Efter at have indført to andre konvergenskriterier, der svarer til vores kvotientkriterium og rodkriterium, går han over til at udlede de samme resultater i højere dimensioner. Herunder får han formuleret Weierstrass' Dobbeltrækkesætning, som stadig bærer dette navn.

5.2 Weierstrass' Dobbeltrækkesætning

Weierstrass ønsker at undersøge, hvornår en uendelig sum af potensrækker er ubetinget konvergent. Den matematiske formulering er rettet og uddybet på en tilføjelse i Hurwitz-afskriften. Det er denne tilføjelse, vi vil følge, selvom det ikke er klart, om det her er Hurwitz, der efterrationaliserer, eller Weierstrass der er kommet på bedre tanker om bevisets overskuelighed. Det er i hvert fald noget klarere formuleret. Fremstillingen i Killing-afskriften ligner helt den oprindelige formulering.

Vi skal prøve at følge Weierstrass' gennemgang af beviset i hans egen notation, men med argumenterne oversat til dansk og ligningsnumrene tilpasset. Hans forudsætninger er, at

$$\phi_0(x) + \phi_1(x) + \cdots \text{ in inf.} \tag{2}$$

er en række, hvor $\phi_v(x)$ er en potensrække, som konvergerer på et fælles område. Derfor er altså

$$\phi_v(x) = \sum_\lambda a_\lambda^{(v)} x^\lambda$$

Efter først at have etableret de matematiske notationsmæssige forudsætninger, siger han, at vi nu ved at sammenfatte efter stigende potenser af x i (2) kan opnå en række

$$\sum_\lambda a_\lambda x^\lambda$$

hvor

$$a_\lambda = \sum_v a_\lambda^{(v)}$$

Efter at have fremført dette, siger Hurwitz/Weierstrass, at vi ikke er i stand til at give en nødvendig betingelse for dette forhold. Denne bemærkning forekommer allerede i Killing-afskriften (Weierstrass 1986, p. 35). Han lover dog at vende tilbage til dette punkt, men dette er ikke sket indenfor rammerne af Hurwitz-afskriften. I stedet vil han give en tilstrækkelig betingelse, hvilket også er gjort i Killing og i den oprindelige version i Hurwitz.

Beviset i Killings afskrift og i den oprindelige version af Hurwitz' afskrift er ganske kort og skal gengives her, før vi undersøger, hvad tilføjelsen i Hurwitz' afskrift betyder.

Den tilstrækkelige betingelse, som Weierstrass vil etablere, er, at summen af de absolutte bidrag fra leddene i $\sum_{\lambda v} a_\lambda^{(v)} x^\lambda$ er endelig. Da kan han nemlig fra potensrækken $\phi_v(x)$ opnå en ny potensrække $\psi_v(x)$ ved at erstatte alle led med deres absolutte værdi. I ovenstående notation betyder dette

$$\psi_v(x) = \sum_\lambda \left| a_\lambda^{(v)} x^\lambda \right| = \sum_\lambda \left| a_\lambda^{(v)} \right| |x|^\lambda \tag{3}$$

Hvis da summen $\psi_0(x) + \psi_1(x) + \cdots$ er endelig for $x = x_0$, hvor x_0 er et reelt tal større end 0, vil $\phi_0(x) + \phi_1(x) + \cdots$ være ubetinget konvergent for alle $|x| < x_0$. Ved sætningen om ombytning kan $\phi_0(x) + \phi_1(x) + \cdots$ derfor bringes på formen af en almindelig potensrække (Weierstrass 1988, p. 66, 71) (Weierstrass 1986, p. 34-35).

Angående konstruktionen af x_0 skal vi bemærke, at forudsætningen om, at summen af de absolutte bidrag er endelig, betyder

$$\infty > \sum_{\lambda v} \left| a_\lambda^{(v)} x^\lambda \right| = \sum_{\lambda v} \left| a_\lambda^{(v)} \right| \left| x^\lambda \right| = \sum_{\lambda v} \left| a_\lambda^{(v)} \right| x_0^\lambda$$

Tilføjelsen går ud på at vise, at dette resultat faktisk betyder, at det almindelige led $a_\lambda x^\lambda$ for $|x| < x_0$ ikke overstiger en igen given grænse. Derefter kan han så bruge hans fundamentalsætning for konvergens af potensrækker (se p. 8). Dette beviser han ved at skrive $\left| a_\lambda x^\lambda \right| = \xi^\lambda \left| \sum_v a_\lambda^{(v)} \right|$ hvor $\xi = |x|$ og iagttage, at $\left| \sum_v a_\lambda^{(v)} \right| \leq \sum_v \left| a_\lambda^{(v)} \right|$ ved generaliseret trekantsregel. Han siger nu, at hvis vi tager et vilkårligt endeligt antal led ud fra $\xi^\lambda \sum_v \left| a_\lambda^{(v)} \right|$ og blandt disse kalder leddet med det højeste index i v for $a_\lambda^{(\rho)}$, så er de udvalgte led indeholdt i rækken $\psi_0(\xi) + \psi_1(\xi) + \cdots + \psi_\rho(\xi)$. Da $\xi < x_0$ er summen derfor mindre end $\psi_0(x_0) + \psi_1(x_0) + \cdots + \psi_\rho(x_0)$. At dette ulighedstegn faktisk gælder, kræver måske den bemærkning, at $\psi_v(x)$ er voksende for voksende $|x|$ (se (3)). Og hvis man nu sætter $s = \psi_0(x_0) + \psi_1(x_0) + \cdots + \psi_\rho(x_0) + \cdots$ in inf., så opnår man altså, at $\xi^\lambda \left| \sum_v a_\lambda^{(v)} \right| < s$ for enhver værdi af λ. Altså er $\sum a_\lambda x^\lambda$ konvergent for $|x| < x_0$ og vi kan derfor bruge omordning af leddene til at opnå $\sum a_\lambda x^\lambda = \phi_0(x) + \phi_1(x) + \cdots$ for $|x| < x_0$.

Weierstrass vender tilbage til denne sætning senere i afskriften, hvor han viser, at summen af uendelig mange potensrækker under forudsætning af uniform konvergens igen kan skrives som en potensrække (Weierstrass 1988, p. 111).

Weierstrass har bevist denne sætning allerede i 1841, hvor han intet kendskab havde til Cauchys funktionsteori. Han havde ved denne lejlighed antaget absolut konvergens af de indgående potensrækker i ethvert punkt. Denne antagelse er unødvendig, hvilket han viste, da han i 1880 beviste sætningen uden denne antagelse (Remmert 1991, p. 251). Som det fremgår af ovenstående, har han til forelæsningerne også antaget denne unødvendige absolutte konvergens. Weierstrass havde allerede i 1841 udviklet ovenstående sætninger i flere variable, og dette gennemfører han da også i begge afskrifterne.

5.3 Indentitetssætning, differentiation og topologiske egenskaber ved $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^n$.

Weierstrass giver til beviset for dobbelt-række-sætningen i flere variable en identitetssætning. Den siger, at koefficienterne i to potensrækker, der stemmer overens, er identiske. Dette bevises ved at gange igennem og er ganske ligetil og ordinært.

Efter således at have vist dobbelt-række-sætningen udleder han en umiddelbar konsekvens, nemlig differentiationsformler for potensrækker. Dette er også ganske analogt med, hvad vi idag ville forvente. Han giver også sin definition af en ikke differentiabel kontinuert funktion. Til at vise kontinuiteten af

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left[(a^n x)\,\pi\right]$$

bruger han uniform konvergens og sine resultaterer herfra (se p. 7). At rækken ikke er differentiabel for nogen værdi af x, når $b < 1$ og a et ulige tal, således at $\frac{3\pi}{2(ab-1)} < 1$, viser han direkte ved at vise, at differenskvotienten ingen grænse har.

I de følgende forelæsninger indfører han generelle åbne mængder i $\mathbb{R}^n$ (og kalder dem stadig for continuum), og han indfører supremumsprincippet og viser Bolzano-Weierstrass-sætningen. Alt dette benytter han så til at definere ligelig kontinuitet og bruger igen dette til at vise sætningen om, at uniformt kontinuerte funktioner antager minimum og maksimum (Weierstrass 1988, p. 73-92). Disse afsnit om topologi og differentialregning er ikke strengt nødvendige for hans målrettede søgen mod begreber om analytiske funktioner. Det er dermed mere som almindeligt matematisk dannelse, at de er medtaget i forelæsningerne.

6 Weierstrass om analytiske funktioner

6.1 Analytisk fortsættelse og definition af en analytisk funktion

Efter således at have indført og diskuteret konvergens af potensrækker er Weierstrass klar til sit dedicerede mål: analytiske funktioner. At udvikle funktioner i potensrækker har gennem historien været et kardinalpunkt for analysen. Taylor's resultat er, at dette kan lade sig gøre lokalt for uendelig ofte differentiable funktioner, men det er et mere generelt begreb, Weierstrass søger. Han ønsker ikke at bygge hans definition på differentiabilitet, som han ser som et af Riemanns teoris største problemer. Hans definition af en analytisk funktion lyder:

> Um jetzt zu der allgemeinen Definition der *analytischen Function* zu gelangen, gehen wir von einer nach Potenzen von $(x - a)$ geordneten Potenzreihe aus, welche innerhalb eines (wenn auch sehr kleinen) Kreises convergent ist. Diese Reihe bezeichnen wir als Element der Function. Aus diesem Elemente leiten wir andre ab, soweit es nur möglich ist. Ein Punkt x_1 gehört zum Gebiete der Function, wenn es irgend möglich ist, zu einem Elemente zu gelangen, dessen Convergenzbereich den Punkt umschliesst. (Weierstrass 1986, p. 72)

Weierstrass kalder sådan et funktionselement for $f(x|a)$, hvilket betyder en potensrækkefremstilling omkring a, som konvergerer på en given skive $D_a = \{y : |y-a| < \rho_a\}$. Han kalder en potensrække $g(x|b)$ opnået udfra skift af udviklingspunkt i $f(x|a)$ for en umiddelbar fortsættelse af $f(x|a)$. Dermed er det klart, at indenfor det område, der er indeholdt i begge konvergensområder, skal potensrækkerne stemme overens, men den funktion, som nu udgøres af både $f(x|a)$ og $g(x|b)$, kan have et større definitionsområde end de to potensrækker individuelt. Ved at tage alle mulige fortsættelser og iterere denne proces opnår Weierstrass, hvad han kalder en analytisk funktion.

Weierstrass fremfører følgende sætning:

> Es findet nun der folgende wichtige Satz statt: "Entweder $g(x|b)$ ist vollkommen unabhängig von den vermittelnden Stellen $c_1, c_2, \cdots, c_n$ oder doch nur verschieden für eine endliche Anzahl von Werthsystemen $c_1, c_2, \cdots, c_n$." (Weierstrass 1988, p. 96)

Denne sætning er indlysende forkert, hvis man tager dens strenge ordlyd. Ullrich nævner dette i forordet til Hurwitz-afskriften og argumenterer for, at Weierstrass i denne sætning implicit har indskrænket sig til algebraiske funktioner, for hvilke sætningen faktisk gælder. Denne bemærkning synes plausibel, idet Weierstrass i Killing-afskriften fra 1868 ikke udelukker uendelig mange forskellige funktionselementer hørende til uendelig mange forskellige systemer af formidlende punkter (Weierstrass 1986, p. 72). Ullrichs argument, som er noget uigennemskueligt, bygger centralt på Mittag-Lefflers sætning, som er bevist i en tilstrækkelig svag udgave allerede i 1875 (på svensk) og i den generelle udgave i 1884 (Bottazzini 1986, p. 284). Mittag-Lefflers sætning siger i moderne formulering, at til en følge af poler $\{a_n\}$ og dertil hørende principale dele findes en meromorf funktion. Mittag-Leffler er blevet inspireret til spørgsmålet i 1875, hvor han fulgte Weierstrass' forelæsninger i Berlin. Jeg er pt. ikke i stand til at udføre den sidste konklusion i Ullrichs argument på en tilfredsstillende måde.

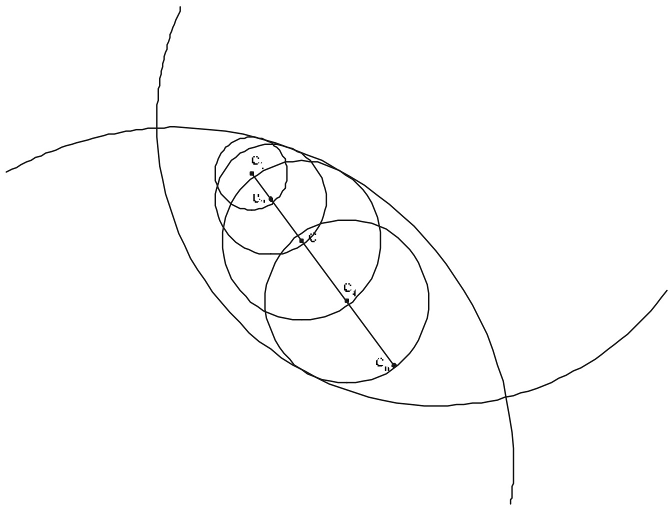
Dette uigennemskuelige modbevis er (ihvert fald delvist) unødvendigt, idet Weierstrass i den samme afskrift viser, at logaritme-funktionen giver anledning til uendelig mange forskellige funktionselementer afhængig af, hvor mange gange man passerer den negative imaginære akse (altså antal omviklinger omkring 0) (Weierstrass 1988, p. 140). Dette er også mit mest indlysende modeksempel, idet logaritmen er så central en funktion, og egenskaben er almindelig kendt. Da logaritmen - som bekendt - er trancendent, antyder dette, at Weierstrass i den formulerede sætning har glemt at indføre ordet "algebraisk", for hvilke Ullrich hævder, at sætningen faktisk gælder. At tillægge denne forglemmelse Weierstrass kan selvfølgelig være overilet, idet afskrifterne har været igennem så mange led (jvf. p. 5).

Eftersom Weierstrass' definition af analytiske funktioner bygger på funktionselementer, er det dog før den videre behandling af analytiske funktioner nødvendigt for ham at vise visse egenskaber ved disse funktions-elementer. Han indfører koincidens af to potensrækker $f(x)$ og $g(x)$ i c ved at $f(x|c)$ og $g(x|c)$ er identiske, og skal således f.x. vise, at hvis to potensrækker koinciderer i et enkelt punkt i fællesmængden af deres konvergensskiver, så koinciderer de på hele denne fællesmængde.

Han siger:

> "Conincidieren zwei Potenzreihen $f(x|b)$ und $g(x|a)$ für irgend eine Stelle c_1, die im Innern beider Convergenzkreise der Reihen liegt, so coincidieren sie auch für jede andere Stelle c_n, die gleichzeitig in dem Convergenskreis der einen wie der andern liegt." (Weierstrass 1988, p. 93)

Weierstrass beviser dette ved at lave en kontinuert overgang, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ hvorom der gælder, at c_v altid ligger i konvergensskiven for såvel $f(x|c_{v-1})$ som $g(x|c_{v-1})$. En sådan konstruktion er imidlertid ikke helt klar. Den situation, han betragter (eller rettere: ikke betragter), er skitseret på figur **??**.



Figur 1: Illustration til bevis for koincidens

Hans bevis (i moderne notation og med mine tilføjelser) siger, at når $f(x|b)$ og $g(x|a)$ koinciderer i c_1, så må der findes en lille omegn U af c_1, således at $f(x|b)_{|U} = g(x|a)_{|U}$. Derefter bruger han identitetsprincippet til at udvide denne omegn U mest muligt, dvs. han gør den til så stor en skive, som der er plads til indenfor konvergensskiverne for $f(x|b)$ og $g(x|a)$. Lad os kalde denne omegn for $\widetilde{U}_1$. Lad os så vælge et punkt c_2 på forbindelseslinien $c_1 c_n$ og indenfor $\widetilde{U}_2$. Så vil de to potensrækker også koincidere i c_2, idet de stemmer overens på $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2$. Således fortsættes, indtil c_n nås, og denne proces vil stoppe, idet snittet mellem to skiver er konvekst, og afstanden fra c_v til randen af dette snit altid er større end et givet ϵ bestemt ved c_1 og c_n.

Men alt dette lader Weierstrass sig ikke mærke med på nuværende tidspunkt. Han kommer dog til et tilsvarende problem nogle få sider senere, hvor han laver nogle overvejelser om de indskudte punkter (Weierstrass 1988, p. 96). Han skal ved denne sidste lejlighed vise, at hvis a_1 ligger indenfor konvergensområdet for $f(x|a)$, så er både $f(x|a_1)$ og $f(x|a)$ (ikke-umiddelbare) fortsættelser af hinanden.

En tilsvarende sætning findes ikke i Killings afskrift, hvor udgangspunktet i stedet er, at han fra en given potensrække $f(x) = \sum a_\lambda x^\lambda$ afleder en ny ved den explicit givne formel $f(x|x_0) = \sum f^{(\lambda)}(x_0)\frac{(x-x_0)^\lambda}{\lambda!}$. Ved at iterere denne proces opnår han så sin analytiske funktion (Weierstrass 1986, p. 68-72).

Efter denne noget besværlige definition skelner han mellem entydige og flertydige funktioner, og han viser, at under indskrænkning af definitionsområdet kan enhver analytisk funktion gøres entydig. Denne indskrænkning betegner Weierstrass med det tyske ord "Zweig", et ord hentet fra Riemann, og i Killings afskrift har han da også nævnt Riemanns navn på dette sted (Weierstrass 1986, p. 73).

6.2 Anvendelser af analytiske funktioner

Efter disse beviser om funktionerne siger Weierstrass, at domænet (altså de variable, for hvilke en analytisk funktion er defineret) udgør et continuum, altså en åben mængde. I de næste forelæsninger viser han, at der altid findes et punkt på randen af definitionsområdet for en potensrække, hvori den tilhørende analytiske funktion ikke lader sig fremstille ved en potensrække. Dette viser han ved at vise Cauchy's uligheder for Taylor-koefficienterne. Hans bevis for disse uligheder er dog forskelligt fra Cauchy's, idet han ikke bruger integraler, men i stedet kun middelværdidannelse. Dette findes allerede i hans artikel fra 1841 og har bidraget væsentligt til at holde hans teori adskilt fra den franske skole som en selv-konsistent teori. Disse resultater sætter ham i stand til at vise Liouvilles sætning, og denne giver så et let bevis for algebraens fundamentalsætning.

Efter disse resultater går Weierstrass over til at beskrive uendelige summer og produkter af analytiske funktioner. Herunder viser han (som tidligere nævnt) igen sin dobbelt-række-sætning under antagelse af uniform konvergens, og han indfører en uniform konvergens for uendelige produkter byggende på uniform konvergens for rækker. Han indfører derefter systemer af analytiske funktioner, hvorved vi skal forstå det system af n-tupler af funktionselementer med samme udviklingspunkt fortsat gennem de samme formidlingspunkter, som vi opnår ved at variere disse formidlingspunkter. Om disse viser han, at de opfylder relationen "er en afledning af" og flere andre små resultater.

Alt, hvad han har udviklet i det en-dimensionale tilfælde, generaliseres derefter til flere variable: fortsættelse, systemer af analytiske funktioner, Cauchy-ulighederne og eksistensen af singulære punkter på konvergensskivens rand.

6.3 Weierstrass og meromorfe funktioner

Disse resultater er udførligt gennemgået i Hurwitz' afskrift, men findes ikke samlet i pæn orden i Killings afskrift. Til gengæld findes der i begge afskrifterne overvejelser angående division af potensrækker. Dette er Weierstrass' adgang til meromorfe funktioner. Først skal han dog igennem nogle overvejelser omkring forskellige slags isolerede singulariteter. Han skelner således mellem "reguläre Stellen" (hævelige singulariteter), "außerwentlich singuläre Stellen" (poler) og "wesentlich singuläre Stellen" (væsentlige singulariteter). Han er klar over, at problemet med at danne funktionen $\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$ er, at $G_2(x)$ kan have uendelige mange nulpunkter i det endelige. Dertil skal han bruge en konstruktion af en funktion med væsentlige singulariteter i givne punkter. Han viser på dette sted kun en sådan konstruktion i tilfældet, hvor han har givet funktioner $G_1(x), G_2(x), \cdots, G_n(x)$, som "im Endlichen überall den Charakter einer ganzen Funktion hat". Da har nemlig

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)+G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right)+\cdots+G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

væsentlige singulariteter i $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (Weierstrass 1988, p. 129). Men han er klar over, at problemet er at skaffe en hel funktion $G_1(x)$, som forsvinder i de uvæsentlige singulariteter for den givne funktion $f(x)$. Han skal altså finde en hel funktion med foruddefinerede nulpunkter. Dette gør han simpelst muligt ved at sætte

$$G(x)=\prod(x-a_\lambda)$$

hvor $\{a_\lambda\}$ er de ønskede nulpunkter. Han kan selvfølgelig omforme ved at dividere med $G(x_0)$

$$\frac{G(x)}{G(x_0)}=\frac{\prod(x-a_\lambda)}{\prod(x_0-a_\lambda)}=\prod\frac{x-a_\lambda}{x_0-a_\lambda}$$

og stadig opnå en funktion med de ønskede nulpunkter. Dog er der den begrænsning, at produktet

$$\prod\frac{x-a_\lambda}{x_0-a_\lambda}=\prod\left(1+\frac{x-x_0}{x_0-a_\lambda}\right)$$

skal konvergere. Han har vist konvergens af dette, hvis rækken $\sum\frac{x-x_0}{x_0-a_\lambda}$ konvergerer, og dette er tilfældet ved omskrivningen

$$\sum\frac{x-x_0}{x_0-a_\lambda}=(x_0-x)\sum\frac{1}{a_\lambda}\frac{1}{1-\frac{x_0}{a_\lambda}}$$

som giver en række, der fra et vist trin af er majoriseret af $\sum\frac{1}{a_\lambda}$. (Weierstrass 1988, p. 129-130)

At han overhovedet interesserer sig for kvotienter mellem to analytiske funktioner, kan have flere årsager. For det første er han ikke den første, der gør det. Der er således en ydre tradition for, at det er et interessant emne - og hvad ville kompleks funktionsteori være uden meromorfe funktioner? Men Weierstrass har også en indre tradition for at betragte forholdet mellem to hele funktioner. Han har nemlig en analogi til tilfældet, hvor det kun er polynomier, der indgår, og det er derfor naturligt at prøve at generalisere til tilfældet med potensrækker.

Den generaliserede Weierstrass' Produktsætning, som han først opdagede i 1876 - altså kun to år før disse forelæsninger, findes først i forelæsningernes sidste del (Weierstrass 1988, p. 147ff). I Hurwitz' afskrift findes der en henvisning til "Weierstraß, Eindeutige analytische Funktionen", som er artiklen "Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" fra 1876, som indeholder beviset for produktsætningen og mere omfattende analyser af konsekvenserne (Weierstrass 1988, p. 152).

6.4 Eksponentialfunktion og logaritme

I Killings afskrift definerer Weierstrass først logaritme-funktionen som løsning til differentialligningen $d \lg x = \frac{dx}{x}$ med randbetingelsen $\lg 1 = 0$. Derefter indfører han eksponentialfunktionen som den omvendte funktion. (Weierstrass 1986, p. 102-106)

I Hurwitz-afskriften derimod indfører han først eksponentialfunktionen, som han definerer ved dens differentialligning. Han viser derefter funktionalligningen ved Taylor-udvikling af $E(x+y)$ omkring y. Derefter viser han, at eksponentialfunktionen antager enhver kompleks værdi bortset fra 0, og det faktum, at kernen for eksponentialafbildningen ($\exp : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$) er $2\pi i\mathbb{Z}$, benytter han til at definere 2π! Først derefter interesserer han sig for den omvendte funktion - logaritme-funktionen. Til undersøgelse af logaritme-funktionen beviser han monodromi-sætningen for trekanter, altså at hvis man fra et funktionselement går langs en strækning og opnår et nyt funktionselement og så vender tilbage (evt. gennem andre formidlende punkter), så opnår man det samme funktionselement, som det man startede med. Dette resultat gælder i almindelighed, hvis den omtalte funktion er holomorf indenfor den beskrevne figur, men Weierstrass viser den her kun for trekanten liggende "tilstrækkelig langt væk fra 0", hvilket er, hvad han skal bruge til behandlingen af logaritmefunktionen. Dog er denne indskrækning ikke væsentlig, men der hersker lidt tvivl om, hvorvidt Weierstrass faktisk har vist monodromi-sætningen i almindelighed her. Efter dette kommer han tilbage til logaritmefunktionen konkret og viser blandt andet, at den antager uendelig mange værdier i hvert punkt (saml. p. 12) (Weierstrass 1988, p. 131-141).

Når Weierstrass indfører en så central funktion i analysen som eksponentialfunktionen på to forskellige måder, er det mere end en tilfældighed. Man har gennem historien brugt flere forskellige definitioner, og vi er i dag nået til visheden om, at det alt sammen giver det samme. Weierstrass' to forskellige definitioner er slet ikke så forskellige, men i dag ser man også folk, der definerer exponentialafbildningen ved dens funktionsligning eller direkte ved den absolutkonvergente række. Det afhænger af smag og behag og af de videre applikationer, man har for øje.

6.5 Analytisk inversion

Det næste kapitel i Hurwitz-afskriften består af nogle flere overvejelser omkring påstanden om, at enhver analytisk funktion ved indskrænkning kan gøres entydig, altså om "Zweig" for en analytisk funktion. Derefter går han i gang med produktsætningen som tidligere nævnt, og han overvejer invertering af analytiske funktioner, som fylder endnu mere i Killings afskrift, hvor han først udleder den i et specialtilfælde og så senere generaliserer. Han får her vist, at en analytisk funktion i ethvert punkt, hvor den afledte ikke forsvinder, har en analytisk invers. Dette resultat viser han i Hurwitz-afskriften som en direkte konsekvens af hans udregninger af implicitte funktioner for potensrækker i flere variable. Vi vil forsøge at resumere fremstillingen fra Hurwitz-afskriften (Weierstrass 1988, p. 153-159):

Det spørgsmål, han starter med at rejse, er, hvorvidt man fra

$$y - b = f(x|a) = A_1 (x - a) + A_2 (x - a)^2 + \cdots \tag{4}$$

kan bestemme x som funktion af y. Han indfører nu begrebet "Gebilde" for mængden af talpar (x, y), der opfylder (4). Senere indfører han mere generelt "analytische Gebilde erster Stufe zweier Veränderlicher" som mængden af punkter (x, y), der opfylder

$$\begin{aligned} x - a &= \phi(t) \\ y - b &= \psi(t) \end{aligned}$$

hvor $\phi(t)$ og $\psi(t)$ er injektive funktioner af t således at $\phi(0) = \psi(0) = 0$. Det resultat, han bygger på, er at hvis han har givet $F(x, u_1, \ldots, u_n)$ som en potensrække i $x, u_1, \ldots, u_n$, således at $F(0, 0, \ldots, 0) = 0$, så skal han fremstille x som en potensrække i $u_1, \ldots, u_n$ under forudsætning af

$$F(x, u_1, \ldots, u_n) = 0$$

Weierstrass' intension med forelæsningsrækken var at lave en indgangsvinkel til de elliptiske og abelske funktioner. Hans kronjuveler - og hele hans egen matematiske stolthed - var sætninger om de abelske integraler og abelske funktioner, specielt inverteringssætningen for abelske funktioner. Men for at nå derhen måtte de studerende føres igennem en stringent opbygning af et matematiske system af uhyre omfang og betydning.

Som det ses, havde forelæsningerne i starten præg af almindelig matematisk indføring, mens han tilsyneladende blev mere målrettet med årene. Dette kan ses i sammenhæng med den fremblomstring, emnet til stadighed nød. Der blev virkelig ofret mange matematiske kræfter på funktionsteori og specielt abelske funktioner i sidste århundrede. Samtidig har udviklingen og færdiggørelsen af hans teori selvfølgelig medvirket til at gøre forelæsningerne mere strømlinede. Killings afskrift er fra den 4. gang Weierstrass, holder disse forelæsninger, og to af de foregående fandt sted omkring hans sammenbrud. Dermed er det yderst sandsynligt, at simpel afpudsning af forelæsningerne såvel som indholdet over 10 år kan give et så meget bedre indtryk.

7 Det forenende arbejde indenfor kompleks funktionsteori

Da Weierstrass holdt sine forelæsninger i Berlin, var funktionsteorien delt i tre lejre: Cauchy, Riemann og Weierstrass. Hver hævdede sin egen indgangsvinkel til den komplekse funktionsanalyse, og hver blev båret frem af studenter af de tre mestre. Cauchys indgangsvinkel var integralerne, Riemanns var Cauchy-Riemann ligningerne (1) og den til lejligheden indførte Riemann-sfære samt geometriske overvejelser om funktionerne, mens Weierstrass støttede sig til potensrækkerne. Først med Goursat lykkedes det i begyndelsen af dette århundrede at forene to af mestrenes begreber om det fundamentale begreb "holomorfi", idet han viste, at de begge (Riemann og Weierstrass) havde ret: deres holomorfi-begreber var identiske. På det tidspunkt var Cauchys og Riemanns holomorfibegreber allerede tæt forbundne, idet de begge byggede centralt på Cauchy-Riemann ligningerne. Dermed ændrede den komplekse funktionsteori - langsomt - karakter fra konkurrence til samarbejde. Denne proces blev båret af mænd som Schwartz, Goursat, Bieberbach, Courant og andre. Man havde stadig sin personlige smag omkring indgangsvinklerne, men resultaterne fra de andre "former" for funktionsteori var blevet tilgængelige. Det havde man dog godt vidst et stykke tid, idet f.x. Riemann brugte potensrække-udviklinger til nogle af hans resultater. Men hos Weierstrass var den indre konsistens så vigtig, at alt helst skulle bygges op på grundlag af potensrækkerne.

I dag skal man ved indgangen til den komplekse funktionsanalyse vælge sin hest, og valget falder oftest i lærebøgerne på Riemanns teori, men derefter er resultater opnået af ryttere af andre heste også tilgængelige.

En stor del af den notation og terminologi, vi idag bruger, er indført af Briot&Bouquet i deres lærebog, som tager udgangspunkt i Cauchys franske skole. Dette skyldes i stor udstrækning den store udbredelse, som denne bog nød, samt det faktum, at Cauchy's teori er så nært forbundet med Riemanns. Man har altså - mere eller mindre - taget Riemanns teori og Cauchy's (eller Briot&Bouquet's) notation.

8 Påvirkninger mellem Riemann og Weierstrass

Neuenschwander gør et stort nummer ud af at påvise vekselvirkninger mellem Riemann og Weierstrass i den retning, at Riemann skulle være modtagelig for indtryk udefra. Weierstrass beskrives derimod som lidt lukket. Denne lukkethed refereres også af Ullrich, når han siger, at Weierstrass trækker andres resultater gennem sin egen mølle, indtil de passer ind i hans matematik (Ullrich 1989, p. 168)[1]. Men Weierstrass krediteres for at være hurtig til at inddrage egne forskningsresultater i undervisningen. Dette antydes faktisk hos Ullrich som en af de primære grunde til hans teoris succes. Men der kan alligevel ikke herske tvivl om, at Weierstrass har kendt til Riemanns teori. På centrale steder benytter han da også Riemanns terminologi (Weierstrass 1986, p. 73) med behørig kildeangivelse.

Men Weierstrass' krav om konsistens er vel nok den største kilde til teorierne om hans lukkede matematik. Han citerede ikke mange andre, men havde heller ikke brug for dette, idet han selv viste deres resultater. For Weierstrass' studenter var hans teorier derfor nærmest uomgåelige. Og disse studenter skulle komme til at sætte et stærkt præg på den matematiske udvikling i de sidste årtier af det 19. århundrede. Schwartz, som var en af Weierstrass betroede studenter, indtog en meget betydelig stilling i Göttingen, og i storhedstiden (1870-1890) besad Weierstrass' skole faktisk næsten alle vigtige positioner, ihvert fald i Tyskland. Som vist i det foregående, har Weierstrass haft stor indflydelse på sine studerende og de kommende matematikere. Men Neuenschwander viser i artiklen (Neuenschwander 1980), at også Riemann har taget inspiration i Weierstrass' potensrækkeudviklinger. Men det er klart, at man også i Berlin på et tidligt tidspunkt

[1]Sammenlign: "Mathematicians are like Frenchmen: whatever you say to them they translate into their own language and forthwith it is something entirely different" - Goethe (Burton 1989, p. 127)

har diskuteret Riemanns teori om analytisk fortsættelse, og at Weierstrass deltog i disse diskussioner (Neuenschwander 1980, p. 8).

Allerede i 1856 udviklede forholdet mellem Riemann og Weierstrass sig til en kappestrid, idet de begge ledte efter et bevis for Jakobis inverteringssætning. En professionel kappestrid, som Riemann vandt, idet han fik sit bevis offentliggjort først. Der er dog ikke noget, der tyder på, at de to store matematikere har haft personlige modsætningsforhold. Runge citerer endda Weierstrass for at sige, at "han elskede Riemann som en broder" (Neuenschwander 1981b, p. 229-232).

At Weierstrass besad et embede i Berlin og Riemann holdt til i Göttingen har medvirket til noget af konflikten, idet de to læresteder har ligget i en årelang misundelse af hinanden.

At man senere gerne har villet etablere en modsætning mellem Weierstrass og Riemann, skyldes nok også tildels, at Weierstrass i 1870 begraver Riemanns teori i en grav så dyb, at det tog resten af århundredet at finde den frem igen. Han giver nemlig en forelæsning i det videnskabelige akademi i Berlin, i hvilken han fremfører nogle meget strenge indvendinger imod Dirichlets princip, som Riemann havde givet en central rolle i hans funktionsteori. Dirichlets princip er iflg. Riemann en "metode til at bevise, at en funktion er fuldstændigt bestemt gennem en partiel differentialligning og egnede lineære grænsebetingelser" (citeret fra (Neuenschwander 1981b, p. 225), som citerer fra Riemanns egne noter). Som en 'bemærkning' angående dette princip fremfører Weierstrass et bevis, som bygger på simpel variationsregning, for, at der ikke altid findes en funktion blandt de tilladte, således at den givne nedre grænse faktisk nås. Først med Hilberts arbejder i 1900 og 1901 blev æren reddet for Dirichlets princip. Dette var i høj grad medvirkende til at kaste Riemanns funktionsteori ud i mørket i resten af århundredet. Men det førte også til, at variationsregningen blev behandlet med Weierstrass' normer for stringens, og dette var netop en stærkt medvirkende grund til, at det lykkedes Hilbert at tilbagevise kritikpunktet ved at udvide sætningen til en mere generel formulering (Bottazzini 1986, p. 302).

En anden lille detalje, som bliver tillagt betydning i den påståede strid, er, at Weierstrass aldrig kvitterede for det første bind af Cauchy's værker, da han modtog det fra det franske akademi.

Det synes således, som om det påståede modsætningsforhold mere er eftertidens fortolkning af historiens udvikling og geografisk misundelse, end egentlige følelser hos de implicerede matematikere. Forholdet var nærmere professionel konkurrence end menneskeligt had eller mistillid. For Weierstrass, med hans ideer om stringens, har den midlertidige sænkning af Riemanns teori nærmere været et fremskridt for matematikken end en personlig triumf over Riemann. Og idag har man måske tendensen til at gå i den anden grøft, nemlig udelukkende at kreditere Riemanns teori. Den har nogle meget smukke applikationer, men hele den komplekse funktionsteori skal nok ses og forstås som resultatet af en kompliceret vekselvirkning mellem mindst 3 store matematikere og personligheder.

9 Konklusion

Som tidligere nævnt var Weierstrass' mål med disse forelæsninger en 'Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen', og disse analytiske funktioners anvendelse var elliptiske og abelske funktioner. Hans egen interesse var centreret om disse abelske funktioner, men i dag har de indtaget en position i anden række. Man må derfor i dag konkludere, at hvad Weierstrass selv anså for hans vigtigste resultater, er kommet til at stå i skyggen af de mange og meget vigtige resultater, han bidrog med i grundlaget for hans teori. Disse resultater ligger stadig som fundament for den matematik, vi dyrker i dag, og mange af disse findes i hans indledende forelæsninger om analytiske funktioner. Derfor er netop disse forelæsninger stadig i dag interessante som selve det fundament, vi i dag tager for givet, og som vi ofte når igennem en stor del af allerede på vores første år på universitetet. Men derudover har Weierstrass' teori selvfølgelig også værdi som det selvstændige alternativ, den udgør til Cauchy's og Riemanns indfaldsvinkler til den komplekse analyse. Hans stringens og indre sammenhæng er skelsættende i hans tid og efterlignelsesværdig i dag, og netop disse krav om stringens har overlevet varierende tiders varierende fokuspunkter indenfor matematikken. Her er virkelig tale om en mand, der i en særpræget karriere bidrager andet og mere end vigtige resultater til matematikken: Metodik.

10 Kommentarer til litteraturlisten

10.1 Primær-litteratur

For kritik og analyse af primær-litteraturen se de dertil dedicerede afsnit i opgaven.

(Weierstrass 1988) er Adolf Hurwitz' afskrift fra forelæsningerne i Berlin 1878. Udgivelsen er bearbejdet af Peter Ullrich, af hvem der også findes en artikel om forelæsningerne (se under sekundær-litteratur).

(Weierstrass 1986) er Wilhelm Killings afskrift fra 1868 udgivet af R. Remmert.

10.2 Sekundær-litteratur

Lærebogen (Remmert 1991) er yderst velegnet som lærebog, men indeholder derudover en række små afsnit med historiske redegørelser og omfattende biografiske afsnit om mange af de store matematikere indenfor feltet. Det gør den til absolut anbefalelsesværdig læsning.

De meget interessante artikler (Neuenschwander 1981a) og (Neuenschwander 1981b) forsøger (som omtalt i opgaven) at påvise en sammenhæng mellem Riemanns og Weierstrass' funktionsteori. Hans udgangspunkt (og tendens) er tydeligt hos Riemann, men artiklerne er forholdsvist objektive og meget lærerige. Den engelske artikel er faktisk bare en begrænset udgave af den tyske. En tredie artikel, som også er benyttet, er (Neuenschwander 1980) om potensrækkeudviklinger hos Riemann.

Den måske mest interessante artikel i denne litteraturliste er (Ullrich 1989), som tager tråden op fra forordet til Hurwitz' afskrift. Ullrich giver i denne artikel flere detaljer og perspektiver.

Manning har skrevet en længere artikel om den tidlige komplekse analyse hos Weierstrass (Manning 1974/75), hvorfra nogle afsnit er brugt i denne opgave. Det er en meget velskreven artikel, som er sjov at læse - også som baggrundsmateriale.

Som baggrundsmateriale har jeg især brugt (Bottazzini 1986), som har en god måde at præsentere gennemgående aspekter samtidig med, at den indeholder en del detaljer.

Til at give det hurtige, overfladiske overblik kan selvfølgelig anbefales værker som for eksempel (Grattan-Guinness 1994) og (Kline 1972), som begge indeholder udmærkede artikler at blive klog af.

Litteratur

Abel (1902). Breve til og fra Abel. In J. Dybwad (Ed.), *Festskrift Ved Hundredaarsjubilæet for Niels Henrik Abels Fødsel*, pp. 13–19. Kristiania.

Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag.

Burton, D. M. (1989). *Elementary Number Theory* (2nd ed.). Wm. C. Brown Publishers.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse*. Paris.

Grattan-Guinness, I. (Ed.) (1994). *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*. London: Routledge. 2 vols.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford University Press. Reprinted in three volumes 1990.

Manning, K. R. (1974/75). The emergence of the Weierstrassian Approach to Complex Analysis. *Archive for the History of Exact Sciences 14*, 297–383.

Neuenschwander, E. (1980). Riemann und das Weierstrassche Princip der analytischen Fortsetzung durch Potenzreihen. *Jahr. d. Dt. Math.-Verein 82*, 1–11.

Neuenschwander, E. (1981a). Studies in the History of Complex Function Theory II: Interactions among the French School, Riemann, and Weierstrass. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 5*(2), 87–105.

Neuenschwander, E. (1981b). Über die Wechselwirkungen zwischen der französischen Schule, Riemann und Weierstrass. Eine übersicht mit zwei Quellenstudien. *Archive for the History of Exact Sciences 24*, 221–255.

Remmert, R. (1991). *Theory of Complex Functions*. New York: Springer-Verlag.

Ullrich, P. (1989). Weierstrass Vorlesung zur Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen. *Archive for the History of Exact Sciences 40*(2), 143–172.

Weierstrass, K. (1986). *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen: nach einer Vorlesungsmitschrift von Wilhelm Killing aus dem Jahr 1868*. Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster. Universität Münster.

Weierstrass, K. (1988). *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen. Vorlesung Berlin 1878*, Volume 4 of *Dokumente zur Geschichte der Mathematik*. Braunsweig: Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Vieweg & Sohn. Notes taken by A. Hurwitz. Edited by P. Ullrich.