

Matematikken i starten af 1800-tallet

NIELS HENRIK ABEL i en matematisk
brydningstid

HENRIK KRAGH SØRENSEN
Institut for Videnskabshistorie
Aarhus Universitet, hkragh@imf.au.dk

19. November 1999

Indhold

1	Indledning	1
2	Fra periferi til centrum	3
2.1	Geografisk periferi?	3
2.2	Emnemæssig periferi?	6
2.2.1	Stringens og rækketeori	6
2.2.2	Elliptiske funktioner	13
2.2.3	Ligningsteori	21
2.2.4	Den “manglende” geometri	24
2.3	Opsummering	25
3	Færdiggørelse af ph.d.-projektet	27
3.1	Ledende spørgsmål	27
3.2	Fremtidsplaner	28

Kapitel 1

Indledning

Perioden fra 1780 til 1850 er i europæisk kultur præget af store omvæltninger: politiske, sociale, økonomiske, såvel som åndelige. Den franske Revolution 1789 betød foruden politiske omvæltninger også en gennemgribende reorganisering af det franske samfund. I samme periode blev også den matematiske videnskab genstand for omfattende forandringer, såvel på det ydre, institutionelle, formmæssige som på det indre, indholdsmæssige plan.

I revolutionens kølvand blev der advokeret for et ideal om højere uddannelse til alle, og for at imødekomme det voksende behov for lærerkræfter blev *École Normale* etableret 1795. Der var et centralt ønske om at formidle matematik på et meget højt niveau, og i løbet af de kun fire måneder, *École Normale* eksisterede, var tre af de største franske matematikere tilknyttede som undervisere: JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813), PIERRE-SIMON, MARQUIS DE LAPLACE (1749–1827) og GASPARD MONGE (1746–1818). På den ligeledes nystartede *École Polytechnique*, også grundlagt 1795¹, blev de ingeniørstuderende undervist i matematik på et niveau, der langt overgik tidligere tiders undervisning i elementær matematik. Undervisningskrave rejste behovet for lærebøger i avanceret matematik; et behov som — for analysens vedkommende — blev løst af f.x. SYLVESTRE FRANÇOIS LACROIX' (1765–1843) lærebøger og AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY's (1789–1857) berømte *Cours d'analyse* (1821). Som JUDITH V. GRABINER har argumenteret for², kan konfrontationen med et bredere publikum have været en af hovedinspirationerne til igen seriøst at overveje matematikkens, og specielt analysens, grundlag.

På det indholdsmæssige niveau undergik matematikken en rivende udvikling: Nye discipliner blev skabt, grundlaget blev taget op til fornyet betragtning, nye begreber og argumentationsformer blev indført, og nogle af de etablerede intuitioner blev draget i tvivl. Matematikernes gradvise professionalisering betød også en stigende specialisering. Få matematikere i det 19. århundrede havde et samlet og opdateret overblik over matematikkens genstandsområde.

Den norske matematiker NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) levede kun kort og producerede kun lidt, men nåede alligevel omkring mange af de centrale aspekter af denne brydningstid i matematikken. Ved at tage udgangspunkt i ABEL's matematik har jeg fået et fokus og et filter til at betragte og beskrive denne overvældende og mangesidige transi-

¹*École Polytechnique* blev egentlig grundlagt som *École Centrale des Travaux Publics* i 1794 og fik efter en omorganisering sit navn året efter. (Schubring 1981, 162)

²For eksempel (Grabiner 1981a, 315) og (Grabiner 1981b, 23–28).

tionsperiode, som bidrog til at give matematikken den form vi kender i dag.

Dette har givet anledning til følgende problemformulering:

Problemformulering: Gennem detaljerede studier af NIELS HENRIK ABEL's (1802–1829) matematik at beskrive centrale træk af den matematiske brydningstid i begyndelsen af det 19. århundrede.

I det følgende vil jeg problematisere problemformuleringen yderligere og skitsere ad hvilke veje, jeg agter at udfylde den.

Kapitel 2

Fra periferi til centrum

At belyse matematikken i starten af 1800-tallet gennem et studium af en enkelt matematikers arbejde kan synes halsløs gerning. Når endvidere den valgte matematiker stammede fra et land på den matematiske verdens periferi, kun levede i knap 27 år og kun publicerede i sine sidste 6 leveår er der behov for legitimering af dette valg.

Selvom NIELS HENRIK ABEL var født, opvokset og uddannet i Norge, dengang beliggende på Europas periferi, var hans videnskabelige virke nært knyttet til den kontinentale — og især den tyske — matematik. Efter at have fået BERNT MICHAEL HOLMBOE (1795–1850) som matematiklærer i katedralskolen 1817 begyndte ABEL — sammen med HOLMBOE og på egen hånd — at studere de store mestre, blandt andre LEONHARD EULER (1707–1783), LACROIX, LAGRANGE og CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). Da Universitetets lærerkræfter og bibliotek ikke længere slog til, og ABEL var påbegyndt selvstændigt kreativt arbejde, var yderligere inspiration nødvendig. Under sin 20 måneder lange Europa-rejse — fra september 1825 til maj 1827 — besøgte ABEL de matematiske miljøer i Berlin og Paris. Efter han vendte hjem til Christiania (Oslo), tilbragte han sine sidste to leveår med at udarbejde sine mangeartede ideer til publikationer. Hans publicerede arbejder spænder over så tilsyneladende forskellige områder som rækketeori og stringens à la CAUCHY, teorien for elliptiske funktioner og integrationsteori, og ligningsteori.

2.1 Geografisk periferi?

Berlin. I Berlin var de matematiske institutioner stadig i deres vorden da ABEL i to omgange besøgte byen. Akademiet havde været blandt 1700-tallets førende med så store navne som EULER og LAGRANGE tilknyttet¹, men efter LAGRANGE 1784 forlod Berlin til fordel for Paris forvitrede det matematiske niveau i Berlin². I en genopbygningsfase, igangsat blandt andet af Napoleonskrigene og den nyhumanistiske bevægelse, var universitetet blevet åbnet 1810³. Man havde forsøgt at kalde GAUSS til lærestolen i matematik, men han afslog, og i stedet blev den noget mindre kendte JOHANN GEORG TRALLES ansat⁴. I 1820'erne blev der gjort tiltag til at supplere uddannelsesudbudet i Berlin med en

¹Det var til Berliner Akademiet LAGRANGE indleverede sin store afhandling om algebraisk løsning af ligninger (Lagrange 1770–1771) omtalt i afsnit ??.

²(Knobloch 1998, 7).

³(Rowe 1998, 9–12).

⁴Se (Biermann 1988, 20–22) og (Schubring 1994, 1444).

polyteknisk læreanstalt efter den franske model. Igen blev GAUSS inviteret, og igen tilvalgte han det mere isolerede intellektuelle miljø i Göttingen⁵. Det er i lyset af dette voksende tyske (preussiske) matematiske samfund, at AUGUST LEOPOLD CRELLE's (1780–1855) stiftelse af *Journal für die reine und angewandte Mathematik* i 1826 skal ses. I forordet til tidsskriftets første bind skrev CRELLE:

“Der findes næppe et betydende vidensområde, som ikke også har sit tyske tidsskrift. Kun den vide, ubegrænsede matematik, denne over tid og sted, over meninger og lidenskaber hævdede videnskab, som blandt alle måske er nærmest beslægtet med sandheden, har for tiden intet [tysk tidsskrift]. [...] Da nu et tidsskrift virkelig er et virksomt middel til at fremme og udbrede en videnskab og beskytte den mod fremmede indflydelser, så er det vel anstregelsen værd at forsøge, om ikke et tysk-sproget sådant [tidsskrift] for matematikken kan bringes til og holdes i live.”⁶

CRELLE's nystartede tidsskrift skulle hurtigt vise sig at blive en succes, blandt andet på grund af de mange banebrydende artikler, som en generation af tyske matematikere, JAKOB STEINER (1796–1863), CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804–1851), GUSTAV PETER LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859), og norske ABEL lod trykke deri. Den første årgang af tidsskriftet overholdt redaktørens ideal om tyske artikler, enten skrevet af tyskere eller oversat til tysk for at gøre de nyeste landvindinger tilgængelige for den tyske matematiker. For ABEL betød dette, at CRELLE oversatte ABEL's oprindelige franske manuskripter til tysk før udgivelsen⁷. Men allerede fra tidsskriftets anden årgang gik CRELLE på kompromis med sprogkravet, og flere artikler udkom på fransk, blandt andet alle ABEL's artikler startende med den vigtige *Recherches sur les fonctions elliptiques* (1827).

I løbet af sin tid i Berlin plejede ABEL omgang med kredsen af matematikere centreret omkring CRELLE og havde fri adgang til CRELLE's omfattende matematiske bibliotek⁸. Hovedparten af ABEL's artikler udkom i CRELLE's *Journal*, og ABEL og CRELLE oparbejdede et nært personligt venskab. Uløseligt forbundet med udbredelsen af CRELLE's *Journal* kom ABEL's arbejder hurtigt til at opnå stor anerkendelse og betydning for de berørte grene af matematikkens udvikling.

Paris. Uddannelsesinstitutionerne i Paris var som nævnt blevet omstruktureret og udvidet for at imødekomme kravene om højere uddannelse til flere, og måske især militærets behov for dygtige ingeniører. Det havde i Paris skabt en hel klasse af professionelle matematikere, som ernærede sig ved undervisning og forskning. Ved *École Polytechnique* blev der undervist i matematik på et højt niveau, og CAUCHY inddrog i undervisningen

⁵(Schubring 1981, 169–173) og (Rowe 1998, 9–10).

⁶“Es giebt kaum einen bedeutenden Gegenstand des Wissens, der nicht auch seine Deutsche Zeitschrift hätte. Nur die weite, unbegrenzte Mathematik, diese über Zeit und Ort, über Meinungen und Leidenschaften erhabene Wissenschaft, die unter allen vielleicht am meisten mit der Wahrheit verwandt ist, hat dermalen keins. [...] Da nun eine Zeitschrift in der That ein sehr wirksames Mittel ist, eine Wissenschaft zu fördern und zu verbreiten, sie gegen fremdartige Einflüsse zu verwahren, so ist es wohl der Mühe werth zu versuchen, ob sich eine solche in Deutscher Sprache für die Mathematik ins Leben rufen und darin erhalten läßt.” (Crelle 1826, 1)

⁷(N. H. Abel→Prof. Hansteen, Berlin 1825. Abel 1902a, 10–11) og (Sylov og Lie i Abel *Œuvres*₂, vol. 1, iii). Da ABEL's franske manuskripter til disse arbejder ikke er overleverede, citerer jeg disse arbejder fra den tyske original-publikation.

⁸(N. H. Abel→Prof. Hansteen, Berlin 1825. Abel 1902a, 11).

sin nyeste forskning om analysens grundlag. Ved det genåbnede akademi, til tider kaldt *Académie des Sciences* til andre tider *Institut (Royale) de France*⁹, samledes de førende franske matematikere jævnlige. Foruden de til disse institutioner hørende tidsskrifter var mulighederne for at offentliggøre matematiske arbejder bedre i Paris end noget andet sted. Akademiets tidsskrifter var meget prestigefulde, og siden 1810 havde matematikerne også haft mulighed for at publicere i JOSEPH DIAZ GERGONNE's (1771–1859) *Annales de mathématiques pures et appliquées* eller, fra 1823, i BARON DE FERRUSAC's (1776–1836)¹⁰ *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*¹¹. Endvidere blev der også trykt mange videnskabelige bøger, lærebøger såvel som monografier, ved Paris' mange bogtrykkere¹².

Efter ankomsten til Paris i juli 1826 havde ABEL besvær med at etablere kontakt til de parisiske matematikere; om hans frustrationer derved taler hans breve til CHRISTOPHER HANSTEEN (1784–1873) og HOLMBOE¹³:

“Jeg kjender næsten ingen. Aarsagen er at hele Verden beboer om Sommeren Landet og er saaledes usynlig. — Indtil dette Øjeblik har jeg kun gjort Bekjendskab med Legendre, Cauchy og Hachette samt et Par mindre Matematikere men ret flinke Monsieur *Saigey*, Redacteur af Bulletin des sciences etc. og Herrn Le-jeune Dirichlet en Preusser, som forleden Dag kom op til mig da han ansaae mig for sin Landsmand.” (N. H. Abel→B. Holmboe, Paris 1826. [Abel 1902a](#), 43)

ABEL's store værdsættelse af CAUCHY's matematik er velkendte¹⁴, men ligeså er hans vurderinger af CAUCHY's personlighed¹⁵, og det er tvivlsomt om de har udvekslet matematiske ideer i noget betydeligt omfang. Efter ABEL — sikkert i CRELLE's bibliotek i Berlin — havde stiftet bekendtskab med CAUCHY's *Cours d'analyse* (1821) og var blevet “omvendt” til CAUCHY's nye stringens (se afsnit 2.2.1), fik han i Paris muligheden for at følge CAUCHY's arbejde på nærmeste hold gennem hans publikationer. ABEL berettede i sine breve, at han med udbytte havde læst CAUCHY's afhandlinger i *Exercices des mathématiques*. Men hvis han opnåede kendskab til CAUCHY's spirende teori for kompleks integration, udnyttede han den ikke i sine arbejder om elliptiske funktioner (se afsnit 2.2.2).

I Paris arbejdede ABEL i solitude med sine matematiske problemstillinger. Med henblik på indlevering til *Académie des Sciences* udarbejdede han sin store *Parisafhandling* om integration af algebraiske differentialformer, hvis skæbne det blev at blive forelagt akademiet 1826, forlagt, fundet og publiceret 1841, atter forlagt, og genfundet 1952¹⁶. ABEL's direkte udbytte af de etablerede Paris-matematikere synes således at have været

⁹([Grattan-Guinness 1994b](#), 1436).

¹⁰Personoplysninger fra ([Stubhaug 1996](#), 580).

¹¹([Grattan-Guinness 1994b](#), 1436–1437).

¹²([Dhombres 1985](#), 98).

¹³(N. H. Abel→Prof. Hansteen, Paris 1826. In [Abel 1902a](#), 39–41)og (N. H. Abel→B. Holmboe, Paris 1826. In [Abel 1902a](#), 43–47).

¹⁴F.x. (N. H. Abel→B. Holmboe, 1826. [Abel 1902a](#), 16) citeret nedenfor og “[...] han er den Matematiker som for nærværende Tid veed hvorledes Mathematiken skal behandles. Hans sager ere fortræffelige” (N. H. Abel→B. Holmboe, Paris 1826. [Abel 1902a](#), 43).

¹⁵F.x. “Cauchy er fou, og der er ingen Udkomme med ham” og “Cauchy er umaadelig catholsk og bigott. En saare forunderlig Ting for en Mathematiker” (N. H. Abel→B. Holmboe, Paris 1826. [Abel 1902a](#), 43).

¹⁶([Brun 1953](#)).

begrænset. Kontakten med JACQUES FRÉDÉRIC SAIGEY (1797–1871)¹⁷, redaktøren på FERRUSAC's *Bulletin*, gav ham muligheden for i et review ([Abel 1826c](#)) at præsentere sit bevis for umuligheden af at løse den generelle femtegradsligning algebraisk for et fransk publikum. Gennem sine brevvekslinger med JACOBI blev den aldrende LEGENDRE klar over ABEL's arbejder indenfor elliptiske funktioner; og det var på LEGENDRE's foranledning, at de parisiske matematikere for alvor kom til at kende til ABEL's eksistens — stort set dog først efter den var ophørt.

Opsummering. Selvom ABEL var opvokset i Norge var hans matematiske løbebane således nært forbundet med den *main stream* matematik, der blev bedrevet på kontinentet, især i Frankrig og Tyskland. ABEL havde studeret de samme mestre, som udgjorde traditionen for kontinentale matematikere, og han havde besøgt to af de største matematiske centre. Kun Göttingen havde han undgået, måske direkte for at undgå mødet med GAUSS¹⁸. Under sin Europa-rejse havde ABEL, foruden at opnå øget adgang og kendskab til den nyeste litteratur, fået skaffet sig mulighed for at publicere sine arbejder. Gennem især CRELLE's *Journal* kom ABEL's matematik til at få omfattende indflydelse på store dele af den kontinentale matematik i 1800-tallet.

2.2 Ennemæssig periferi?

ABEL's geografiske baggrund på periferien er således ikke en hindring for at benytte hans matematik som en indfaldsvinkel til udviklingen af matematikken i starten af 1800-tallet. En anden, og dybere, indvending kunne gå på det faktiske omfang af ABEL's matematiske arbejder. Dels spænder de ikke over *hele* det matematiske univers, som det så ud i starten af det 19. århundrede, og dels er hans publikationer så fåtallige, at der er en del spørgsmål, de ikke vil være i stand til at besvare. I det følgende vil jeg kort beskrive ABEL's bidrag til hans tre "kerne-felter" og sætte dem ind i et fælles perspektiv. Ved at sætte ABEL's arbejder ind i deres kronologiske sammenhænge håber jeg til dels at omgå den begrænsning, deres fåtallighed kunne synes at lægge op til. I afsnit 2.2.4 vil jeg beskrive nogle af de begrænsninger, som ABEL's *emnevalg* lægger på udtrykskraften af ethvert studium af matematikken, som tager et udgangspunkt som mit.

2.2.1 Stringens og rækketeori

Binomialsætningen. ABEL's betydning for den i 1800-tallet så betydningsfulde diskussion om matematikkens (analysens) grundlag begrænser sig til teorien for uendelige rækker. Endvidere begrænser ABEL's publikationer om rækketeori sig til blot to: et bevis for binomialsætningen ([Abel 1826e](#)) og en polemik med LOUIS OLIVIER¹⁹ omkring generelle konvergenzkriterier ([Abel 1828a](#)). Når der alligevel tales om ABEL's rolle i den nye stringens-bevægelse²⁰, skyldes det ikke mindst at nogle af de breve, han sendte hjem fra

¹⁷Personoplysninger fra ([Stubhaug 1996](#), 589).

¹⁸Visse af ABEL's breve kan tydes i denne retning, f.x. (N. H. Abel→Prof. Hansteen, Berlin . [Abel 1902a](#), 20) og (N. H. Abel→Prof. Hansteen, Dresden 1826. [Abel 1902a](#), 24).

¹⁹Bortset fra navnet har det — indtil videre — været umuligt at finde information om LOUIS OLIVIER. Se også fodnote ?? side ?? i bilaget.

²⁰F.x. ([Bottazzini 1986](#), 85–91).

sin Europa-rejse²¹, tegner et levende og spændende billede af en “ny-omvendt” CAUCHY-inspireret matematiker:

“Alle mine Kræfter vil jeg anvende paa at bringe noget mere Lys i det uhyre Mørke som der uimodsigelig nu findes i *Analysen*. Den mangler saa ganske al Plan og System, saaat det virkelig er høist forunderlig at den kan studeres af saa mange og nu det værste at den aldeles ikke er stræng behandlet. [...] Naar man blot gaaer almindelig tilværks saa gaaer det nok; men jeg har maattet være særdeles forsigtig, thi de engang uden strængt Bevis (∴ uden Bevis) antagne Sætninger har slaaet saa dybe Rødder hos mig at jeg hvert Øjeblik staaer Fare at bruge dem uden nøiere Prøvelse.” (N. H. Abel→Prof. Hansteen, Dresden 1826. [Abel 1902a](#), 22–23)

Det mest sammenhængende syn på rækketeorien, vi kan udlede fra ABEL’s værker stammer fra indledningen til hans bevis ([Abel 1826b](#)) for *binomialsætningen*.

Theorem 1 (Binomialsætningen) *Under passende antagelser om x og m (som det var en vigtig opgave i starten af 1800-tallet at afgøre), er*

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Denne sætning var blandt analysens vigtigste hjælpemidler og udgjorde et af de centrale redskaber f.x. i EULER’s udvikling af funktioner i potensrækker. Sætningen lå i traditionen fra EULER via LAGRANGE også til grund for hele den højere analyse, differential- og integralregningen, idet TAYLOR’s formel typisk blev bevist derudfra.

Fra flere sider blev binomialsætningen i starten af 1800-tallet udsat for kritik for ikke at være tilstrækkelig omhyggeligt bevist; således udgav filosof-matematikeren BERNARD BOLZANO (1781–1848) [1816](#) et forsøg på et mere stringent bevis. Binomialsætningen indtog også en central position i CAUCHY’s lærebog *Cours d’analyse* ([1990](#)), og både BOLZANO og CAUCHY opbyggede, uafhængigt, deres nye rækketeori målrettet mod denne sætning. Forfærdet, som han var, over de mange sætninger i analysen, som blev anvendt uden tilstrækkeligt bevis, skrev ABEL hjem til HOLMBOE:

“Jeg troer ikke Du skal kunne fremsætte for mig mange Sætninger hvori der forekommer uendelige Rækker, imod hvis Beviis jeg ikke skal kunne gjøre grundede Indvendinger. Gjør det, saa vil jeg svare Dig. — Selv Binomial[!]-Formelen er endnu ikke strængt beviist. — Jeg har fundet at man har

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots$$

for alle Værdier af m naar x er mindre end 1. Naar x er lig +1 har man den samme Formel i det Tilfælde at m er > -1 men ellers ikke, og naar $x = -1$ finder ikke Formelen Sted undtagen naar m er positiv. For alle andre Værdier af x og m er Rækken $1+mx+\text{etc.}$ divergent. Det Taylorske Theorem, Grundlaget for hele den høiere Mathematik er ligesaa slet begrundet. Kun eet

²¹Især (N. H. Abel→Prof. Hansteen, Dresden 1826. In [Abel 1902a](#), 22–26), (N. H. Abel→B. Holmboe, 1826. In [Abel 1902a](#), 13–19)og (N. H. Abel→B. Holmboe, Paris 1826. In [Abel 1902a](#), 51–52).

eneste strængt Beviis har jeg fundet og det er af Cauchy i hans Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal.” (N. H. Abel→B. Holmboe, 1826. [Abel 1902a](#), 16)

I artiklen ([Abel 1826e](#)) offentliggjorde ABEL et bevis for binomialsætningen om hvilket han selv sagde:

“Jeg tør sige at det er det første fuldkommen strænge Beviis for Binomialformelen i alle mulige Tilfælde” (N. H. Abel→B. Holmboe, Paris 1826. [Abel 1902a](#), 52)

For at behandle binomialsætningen med deres nye krav til stringens havde såvel CAUCHY og BOLZANO som ABEL brug for centrale begreber som konvergens og kontinuitet. Hos CAUCHY hentede ABEL sine definitioner omkring konvergens af rækker og kontinuitet af funktioner, formuleret ved hjælp af infinitesimaler, som det stadig var almindelig praksis. ABEL overtog også CAUCHY’s doktrin om at forbyde divergente, altså ikke-konvergente, rækker fra analysen²². ABEL’s bevis byggede videre på CAUCHY’s og udnyttede de samme ideer, hvoriblandt flere går tilbage til EULER. Centralt stod dog fra og med CAUCHY anvendelsen af definitionerne af kontinuitet og konvergens, sætninger om rækkers multiplikation, og med ABEL en afklaring af tilfældet, hvor eksponenten var et komplekst tal.

Konvergensbegreber. Blandt de mange begreber i analysen, som fik en ny position og et nyt indhold i 1800-tallet er konvergensbegrebet. I midten af 1700-tallet havde EULER arbejdet med et funktionsbegreb, som indholdt et moment af totalitet: en funktion var givet ved et udtryk og udtrykket havde mening i et totalt domæne, hyppigst de komplekse eller reelle tal²³. Eftersom rækker og funktioner var uløseligt forbundne, blev opfattelsen af rækker *algebraisk* og *formel*. Således ville EULER tale om lighed mellem, for eksempel, de to udtryk

$$\frac{1}{1-x} \text{ og } \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

da den sidste fremkommer af den første ved *lang division*²⁴.

I starten af 1800-tallet skete et skift væk fra denne formelle, algebraiske opfattelse af lighed mellem funktioner. I stedet fokuseredes på en numerisk, aritmetisk lighed baseret på grænseværdibegrebet, som formaliseres netop til dette formål²⁵. Centralt blev konvergensbegrebet, som i CAUCHY’s trend-skabende version lyder:

“Lad

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

²²Se f.x. “Divergente Rækker ere i det Hele noget Fandensskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa.” (N. H. Abel→B. Holmboe, 1826. [Abel 1902a](#), 16)

²³([Bottazzini 1986](#), 12).

²⁴([Lützen 1978](#), 11–12).

²⁵For overgangen fra den algebraiske til den aritmetiske opfattelse af rækker, se f.x. ([Fraser 1987](#)) og ([Jahnke 1993](#)). For formaliseringen af grænseværdibegrebet, se f.x. ([Grabiner 1981b](#), 80–87).

være summen af de første n led, hvor n betegner et vilkårligt helt tal. Hvis, for stadigt voksende værdier af n , summen s_n nærmer sig ubestemt til en bestemt grænse s , siges rækken at være *konvergent* og den omtalte grænse kaldes rækkens *sum*. Omvendt, hvis summen s_n ikke nærmer sig nogensomhelst fast grænse når n vokser ubestemt siges rækken at være *divergent* og har [da] ingen sum.”²⁶

Tidligere havde der eksisteret et andet konvergensbegreb, nemlig at leddene aftog monotont mod nul (eventuelt fra et vist trin), som var blevet benyttet af såvel EULER²⁷, som JEAN LE ROND D’ALEMBERT (1717–1783)²⁸ og GAUSS²⁹. Men det er CAUCHY’s fortjeneste at fundere konvergensbegrebet i grænseværdibegrebet, også selvom det for en tid betød at man skulle vende sig til et nyt indhold af begrebet. Det er karakteristisk for CAUCHY’s tilgang til stringens, at han overtog eksisterende sprogbrug³⁰, hvorimod BOLZANO undlod at bruge det allerede ibrugværende ord “konvergent” i forbindelse med sin revision af rækkelæren³¹.

Til brug for beviset for binomialsætningen var det nødvendigt at betragte rækker af *funktioner*. I den forbindelse konfronterede ABEL sin læremester CAUCHY med en *undtagelse* (“Ausnahme”) — vi ville kalde den et modeksempel — til en central sætning.

Om rækker af funktioner havde CAUCHY i *Cours d’analyse* fremsat følgende sætning³²:

“Når de forskellige led i rækken (1) [dvs. $u_0, u_1, u_2 \dots u_n, u_{n+1}, \&c\dots$] er funktioner af en og samme variabel x og kontinuerte med hensyn til denne variabel i en omegn af en partikulær værdi for hvilken rækken er konvergent, så vil summen også, i omegnen af denne partikulære værdi, være en kontinueret funktion af x .”³³

Beviset havde CAUCHY givet i en verbal præsentationsform. Han argumenterede for, at hvis man betragtede rækken

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots,$$

²⁶“Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s’approche indéfiniment d’une certaine limite s , la série sera dite convergente, et la limite en question s’appellera la somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s’approche d’aucune limite fixe, la série sera divergente, et n’aura plus de somme.” (Cauchy 1821, 123)

²⁷(Barbeau and Leah 1976, 143).

²⁸(Grabiner 1981b, 99–101).

²⁹(Laugwitz 1989, 163).

³⁰(Grabiner 1981b, 101).

³¹(Hauch 1997, 80–82).

³²Sætningen er omdiskuteret i den nyere matematikhistorie, i lyset af ikke-standard analyse. Se f.x. (Laugwitz 1987; Laugwitz 1988–89) for præsentationer, der tager infinitesimalerne seriøst og argumenterer for, at CAUCHY ingen fejl begik.

³³“Lorsque les differens termes de la série (1) sont des fonctions d’une même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d’une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .” (Cauchy 1821, 131–132)

delte den efter n led, og gav x den uendelig lille tilvækst α , så ville den første del, s_n , være et polynomium og ændringen deraf ved at gå fra x til $x + \alpha$ ville forsvinde, uanset værdien af n . Bidraget fra halen, $r_n(x + \alpha)$, kunne endvidere gøres “umærkeligt”, ligesom $r_n(x)$ selv, ved blot at vælge n stor nok. Denne formulering skjulte at det n der skulle gøre $r_n(x + \alpha)$ lille kunne afhænge af α og vokse ubegrænset, når α aftog.

Til denne sætning præsenterede ABEL sin *undtagelse*:

“Det synes mig dog som om denne sætning tillader undtagelser. Således er f. eks. rækken

$$\sin \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi + \frac{1}{3} \sin 3\phi - \dots \text{ o.s.v.}$$

diskontinuert for enhver værdi $(2m + 1)\pi$ af x , hvor m er et helt tal. Som bekendt findes mange rækker med lignende egenskaber.”³⁴

Den række, ABEL gav som eksempel var FOURIER-rækkeudviklingen af funktionen

$$x \mapsto \frac{x}{2} \text{ for } x \in]-\pi, \pi[.$$

Rækkeudviklingen var blevet fundet af FOURIER selv, og ABEL nævnte den første gang i et brev afsendt under hans første ophold i Berlin³⁵. Den sætning (V), som fodnoten optræder i forbindelse med, udgør ABEL’s svar på denne “undtagelse” til CAUCHY’s sætning. Hvor CAUCHY havde hævdet, at summen af en vilkårlig række af kontinuerte funktioner var en kontinuert funktion, begrænsede ABEL sig til en klasse af rækker, hvor konvergensten lignede potensrækkernes³⁶. ABEL søgte i lighed med den umiddelbart foregående sætning IV (se nedenfor) at bevise, at hvis

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \dots$$

var en række, hvori v_0, v_1, \dots var kontinuerte funktioner af x på intervallet $]a, b[$, så var rækken

$$f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots,$$

for $\alpha < \delta$, konvergent og udgjorde en kontinuert funktion af x på intervallet. For at forstå ABEL’s bevis er det nødvendigt at sammenholde det med hans sætning IV.

I sætning IV havde ABEL bevist, at hvis rækken

$$f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots + v_m\alpha^m + \dots, \quad (2.1)$$

³⁴“Es scheint mir aber, daß dieser Lehrsatz Ausnahmen leidet. So ist z. B. die Reihe

$$\sin \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi + \frac{1}{3} \sin 3\phi - \dots \text{ u.s.w.}$$

unstetig für jeden Werth $(2m + 1)\pi$ von x , wo m eine ganze Zahl ist. Bekanntlich giebt es eine Menge von Reihen mit ähnlichen Eigenschaften.” (Abel 1826e, 316, fodnote)

³⁵(N. H. Abel → B. Holmboe, 1826. Abel 1902a, 18).

³⁶Denne begrænsning til kun at betragte *potensrækker*, som synes at udgøre en sikker grund for analysen, kan spores i ABEL’s breve, f.x. (N. H. Abel → Prof. Hansteen, Dresden 1826. Abel 1902a, 22). LAKATOS har set dette som et eksempel på den mekanisme i matematikkens udvikling, som han benævner *exception barring* (1976, 133–136).

hvor v_0, v_1, \dots i modsætning til sætning V var konstanter, var konvergent for $\alpha = \delta$, så var rækken også konvergent for enhver mindre værdi af α . Endvidere ville det være sådan, at for aftagende β ville $f(\alpha - \beta)$ nærme sig grænsen $f(\alpha)$ når $\alpha < \delta$. Dette er altså det velkendte resultat, at potensrækker konvergerer på konvergensintervallet (konvergenssirkelen, hvis α havde kunnet være kompleks) og dér fremstiller en kontinuert funktion. For at bevise denne sætning delte ABEL rækken op i

$$\begin{aligned} v_0 + v_1\alpha + \dots + v_{m-1}\alpha^{m-1} &= \phi(\alpha) \text{ og} \\ v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \dots &= \psi(\alpha). \end{aligned}$$

Han argumenterede så — ved hjælp af en anden forudgående sætning III — for

$$\psi(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m \delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1} \delta^{m+1} \dots < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m p,$$

hvor p betegned den største blandt størrelserne $\left\{ \sum_{u=0}^U v_u \delta^u : U > 0 \right\}$. At denne mængde er opadtil begrænset argumenterede ABEL ikke for; det er en simpel konsekvens af, at rækken (2.1) er konvergent. Når dette var gjort, valgte ABEL m så stor, at $\psi(\alpha) = \omega$, hvor ω var ABEL's symbol for en infinitesimal. Ved så at vælge β lille, fandt han

$$\phi(\alpha) - \phi(\alpha - \beta) = \omega,$$

og kontinuiteten var bevist.

Beviset for sætning V er, som nævnt, nært beslægtet med det foregående. I beviset for sætning V indgår en størrelse $\theta(x)$, som spiller samme rolle som p ovenfor. Hvor man måske kan overbevise sig om, at ABEL havde indset at størrelsen p var endelig, er det derimod klart, at han ikke havde indset, at selvom $\theta(x)$ er endelig for ethvert x , kan $\theta(x)$ godt være ubegrænset som funktion af x . Med vores moderne notation og opfattelse af grænseovergange som endelige processer, er det muligt for os at argumentere omkring disse forhold. Men hos ABEL er disse argumenter hovedsageligt verbale, og da han kun har eet symbol, ω , i brug for alle infinitesimale størrelser, kom han ikke til disse overvejelser. Det blev i stedet den næste generation, SEIDEL (1847) og STOKES (1847), som præciserede disse forhold i CAUCHY's bevis påpegede at det var muligt at det nødvendige n voksede ubegrænset, når α aftog. Dermed banede de vejen for ε - δ -analysen som den fandt sit udtryk hos WEIERSTRASS. Efter at have "reageret" på ABEL's undtagelse med tavshed i et kvart århundrede forelagde CAUCHY i 1853 en kort artikel for *Académie des Sciences*³⁷. Deri "reparerede" CAUCHY sin sætning ved at indføre et yderlige krav til konvergens, svarende til hvad vi i dag kalder *uniform konvergens*.

Konvergenskriterier. Efter CAUCHY havde indført det numeriske konvergensbegreb, ifølge hvilket en række siges at konvergere når dens afsnitssummer nærmer sig en fast grænse, blev det vigtigt at udvikle redskaber til at afgøre hvorvidt givne rækker var konvergente eller divergente (Grabiner 1981b, 106–109). Store dele af kapitel 6 i lærebogen *Cours d'analyse* er helliget CAUCHY's udledning af flere generelle kriterier, der også idag spiller centrale roller i analysen: kvotientkriteriet, rod-kriteriet og logaritmekriteriet³⁸.

³⁷(Cauchy 1853).

³⁸F.x. for reelle rækker (Cauchy 1821, 132–147).

I (1827) offentliggjorde en matematiker ved navn LOUIS OLIVIER en artikel i CRELLE's *Journal*, hvori han hævdede at have bevist, at hvis produktet na_n forsvandt for $n = \infty$, så ville rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være konvergent. I modsat fald, hævdede OLIVIER, ville rækken være divergent. I et svar på denne artikel, trykt i den følgende årgang, tog ABEL en generel formulering af problemet op³⁹. Efter at ABEL først illustrerede, hvorledes rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

udgjorde et modeksempel mod OLIVIER's påstand, tog han muligheden for sådanne konvergenzkriterier op til revision. Ved et kort, nydeligt argument viste han, at ethvert håb om at finde kriterier som det fremførte måtte skuffes. Han beviste nemlig ud fra uligheden

$$\log(1+x) < x,$$

at uanset hvilken funktion ϕ af indices $0, 1, \dots$ man betragtede, ville der kunne konstrueres divergente rækker for hvilke $\phi(n)a_n \rightarrow 0$ og konvergente rækker for hvilke $\phi(n)a_n \rightarrow \infty$.⁴⁰ Det var altså generelt

“umuligt at finde en funktion ϕn således at en vilkårlig række $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, hvori vi antager at alle leddene er positive, er konvergent hvis $\phi n \cdot a_n$ er nul for $n = \infty$ og divergent i det modsatte tilfælde.”⁴¹

I umiddelbar forbindelse med ABEL's svar på OLIVIER's artikel fik OLIVIER mulighed for at præsentere sine argumenter igen. Han argumenterede da geometrisk og åbenbarede noget af den intuition, der havde ledt ham til resultatet i første omgang. Det er således tvivlsomt, i hvilken grad ABEL's svar tilfredsstillede hans samtidige.

Opsummering. ABEL behandlede *binomialrækken* at to årsager: dels var han — igennem at læse CAUCHY — blevet draget til kritisk at betragte analysens fundament, for hvilket binomialformelen spillede en væsentlig rolle, dels kunne han udfylde et åbentstående spørgsmål i CAUCHY's *Cours d'analyse* ved at bevise binomialsætningen for komplekse eksponenter. I forbindelse med udarbejdelsen af de rækketeoretiske forudsætninger bemærkede ABEL en *undtagelse* til en sætning hos CAUCHY, men eftersom ABEL var ligeså dybt funderet i infinitesimalerne, der i denne forbindelse fuldstændig skjulte problemets årsag, opnåede han ikke indsigt i den bagvedliggende fejl.

Sikkert også inspireret af CAUCHY's undersøgelse af konvergenzkriterier for rækker, og måske opfordret af CRELLE, undersøgte ABEL et konvergenzkriterium, som OLIVIER havde præsenteret i CRELLE's *Journal*. Selvom han ved et modeksempel fandt, at kriteriet ikke kunne være korrekt, stoppede han ikke der. I stedet gik han videre og beviste — ved et modstridsargument — at *ingen* kriterier af den omtalte form kunne eksistere. En sammenligning af ABEL's sprogbrug i de to *refutationer* (CAUCHY's sætning og OLIVIER's kriterium) afslører en ung og ambitiøs matematiker, der ikke kan tillade sig at udbasunere

³⁹(Abel 1828a).

⁴⁰(Abel 1828a, 80–82).

⁴¹“[...] il est impossible de trouver une fonction ϕn telle qu'une série quelconque $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, dont nous supposons tous les termes positifs, soit convergente si $\phi n \cdot a_n$ est zéro pour $n = \infty$, et divergente dans le cas contraire.” (Abel 1828a, 80)

sine mestres fejl alt for kraftigt på skrift. Formuleringer som “undtagelse” og “synes ikke at være helt korrekt” præger publikationerne, hvorimod ABEL i notesbøgerne drager mere vidtrækkende konsekvenser af modeksemplerne.

Som ABEL selv nævnte i sit brev til HANSTEEN (se p. 7), skete hans “omvendelse” til CAUCHY’s stringens i løbet af Europarejsens første del. I sin studietid i Norge havde ABEL studeret 1700-tallets mestre, især EULER, og spor af den formelle tilgang til rækker kan findes i ABEL’s tidlige notesbøger, f.x. (Abel 1839). Ved at sammenholde udviklingen i ABEL’s tilgang til rækketeorien med hans arbejder indenfor elliptiske funktioner (se afsnit 2.2.2) håber jeg at kunne kaste lys over denne omvendelsesproces.

ABEL’s effektive brug af modeksempler er et andet aspekt jeg vil forfølge yderligere. I forbindelse med indførelsen af de mange nye begreber i 1800-tallet blev modeksempler hyppigt anvendt i bestemmelsen af begrebernes ekstension. Således indtager f.x. CAUCHY’s uendeligt ofte differentiable funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$, som ikke falder sammen med sin TAYLOR række i mere end et punkt⁴², DIRICHLET’s intetsteds kontinuerte funktion⁴³, og KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS’ (1815–1897) *Monster*⁴⁴ deres roller som begrebsbegrænsere i 1800-tallet. Funktionen $e^{-\frac{1}{x^2}}$ viste at LAGRANGE’s tilgang til differentialregningen gennem rækkeudviklinger ikke kunne indfange denne (og uendeligt mange andre) funktioner; DIRICHLET understregede forskellen mellem vilkårlige og kontinuerte funktioner; og WEIERSTRASS’s kontinuerte, intetsteds differentiable funktion afklarede århundredets forvirring af kontinuitet og differentiability. I ABEL’s og hans samtidiges værker optræder modeksempler i tilsvarende roller. Med udgangspunkt i ABEL og udvalgte blandt hans samtidige håber jeg at kunne studere den tidlige, positive og konstruktive anvendelse af modeksempler i matematikken samt disse modeksemplers status for matematikerne.

2.2.2 Elliptiske funktioner

Et af de største forskningsfelter i 1800-tallets analyse var studiet af de såkaldt *elliptiske funktioner* som er omvendte funktioner til *elliptiske integraler*. Lige siden man umiddelbart efter differentialregningens opfindelse i slutningen af 1600-årene var begyndt at studere transcendent funktioner (kurver), havde man stiftet bekendskab med de *elliptiske integraler*, som er integraler af formen

$$\int \frac{P(x) dx}{\sqrt{R_4(x)}}$$

hvor P og R_4 er polynomier, og graden af R_4 er 3 eller 4. Disse integraler var transcendent (i.e. ikke-algebraiske funktioner), som heller ikke kunne reduceres til de kendte og accepterede transcendent funktioner: trigonometriske funktioner og eksponential- og logaritmefunktioner. De blev i stedet betegnet “højere-ordens transcendent” og blev anset for den næste klasse af transcendent funktioner. Navnet *elliptiske integraler* har de fået, fordi rektifikationen af ellipsen viste sig at give anledning til bestemmelsen af et sådant integral; deres praktiske anvendelser er mange, bare indenfor rektifikation af kurver.

⁴²(Cauchy 1822, 277). Eksemplet gentages i *Leçons sur le calcul différentiel*, 1829 (Cauchy *Œuvres*, ser. 2, vol. 4, p. 377–395).

⁴³(Dirichlet 1829, 169).

⁴⁴(Weierstrass→P. du Bois-Reymond, 1873. In Weierstrass 1923, 199–201). Brugen af benævnelsen *Monster* knytter an til (Lakatos 1976) og (Volkert 1987; Volkert 1986).

I 1700-tallet blev disse integraler studeret af så store matematikere som EULER, LAGRANGE, og ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752–1833). Et af EULER's væsentligste bidrag var den såkaldte *additionssætning*, der siger at summen af to værdier af det specifikke integral af formen

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{R_4(t)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{R_4(t)}}$$

kan skrives som endnu et integral af samme form

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{R_4(t)}},$$

hvor z var givet algebraisk ud fra x og y . Et af LAGRANGE's væsentligste bidrag var at søge standard former for elliptiske integraler, og dette projekt blev også gennemført af LEGENDRE, der reducerede samtlige elliptiske integraler til de tre arter gengivet i tabel 2.1⁴⁵.

Art	Integral i x	Integral i ϕ
1. art	$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$	$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$
2. art	$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx$	$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi$
3. art	$\int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$	$\int \frac{d\phi}{(1+n \sin^2 \phi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$

De variable, ϕ og x , er relaterede ved $x = \sin \phi$.

Tabel 2.1: LEGENDRE's klassifikation af elliptiske integraler

Efter at have reduceret alle elliptiske integraler til disse tre standard former, opbyggede LEGENDRE en omfattende *transformationsteori*, hvis formål det var at beskrive værdien af et givent integral hørende til parametrene k og n i forhold til værdier af andre integraler hørende til andre parametre. Dette udviklede sig snart til en i høj grad regningsbaseret og ret kompliceret matematisk teori; en stor del af LEGENDRE's arbejde indenfor feltet var beskæftiget med at producere numeriske evalueringer af elliptiske integraler.

Inversion af elliptiske integraler. Første gang de elliptiske funktioner krydsede ABEL's matematiske bane var i 1821, da FERDINAND DEGEN (1766–1825) havde fået tilsendt ABEL's formodede løsning til den generelle femtegradsligning (se afsnit 2.2.3). I sit svar — stilet til HANSTEEN — foreslog DEGEN, at ABEL lagde den sterile ligningsteori til side og i stedet kastede sig over disse elliptiske transcenderter:

“Neppe kan jeg ved denne Anledning undertrykke det ønske, at den Tid og de Aandskræfter et Hoved, som Hr. A. [ABEL] skjænker en i mine Øine noget steril Gjenstand, maatte ydes et Emne, hvis Uddannelse vil have de vigtigste Følger for hele Analysen og dens Anvendelse paa dynamiske Undersøgelser, jeg mener de *elliptiske Transcenderter*. Ved tilbørligt Anlæg for Undersøgelser af dette Slags vil den alvorlige Gransker ingenslunde blive

⁴⁵(Houzel 1986, 295–296).

staaende ved disse ellers i og for sig selv høyst mærkværdige Functioners mange og smukke Egenskaber, men opdage maghellanske Gjennemfarter til store Partier af eet og samme uhyre analytiske Ocean.” (Prof. Degen→Prof. Hansteen, Kjøbenhavn 1821. [Abel 1902b](#), 93–94)

Det er uklart præcist hvornår ABEL tog opfordringen op, men i hvert fald under sit besøg i København 1823⁴⁶ havde han kastet sig over studiet af disse transcendent. I et brev til HOLMBOE afslørede han endda mere end det: han var også nået til det trick, der skulle blive grundlaget for hele hans bidrag til teorien for *elliptiske funktioner*:

“Den lille Afhandling som Du erindrer handlede om de omvendte Functioner af Transcendantes elliptiques, og hvori jeg havde beviist noget umueligt har jeg bedet ham [DEGEN] læse igjennem; men han kunde ikke opdage nogen Feilslutning, eller begribe hvori Feilen stak; Gud veed hvorledes jeg skal komme ud deraf.” (N. H. Abel→B. Holmboe, Kjøbenhavn 1823. [Abel 1902a](#), 5)

Den helt fremtrædende nye ide hos ABEL var at vende tilgangen til de elliptiske funktioner på hovedet. Tidligere havde man studeret integralets *værdi* som en funktion af *den øvre grænse*, men ABEL foreslog i stedet af betragte den omvendte funktion. I sin første publikation indenfor feltet, *Recherches sur les fonctions elliptiques* (1827), skrev ABEL:

“Jeg sætter mig for, i denne afhandling, at betragte den inverse funktion, det vil sige funktionen $\phi\alpha$ bestemt af ligningerne

$$\begin{aligned}\alpha &= \int \frac{\partial\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} \text{ og} \\ \sin\theta &= \phi(\alpha) = x.\end{aligned}$$

[...] Ved at antage at $\phi\alpha = x$ får man i kraft af det foregående:

$$\alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}. \text{ }^{47} \quad (2.2)$$

⁴⁶ ABEL besøgte det matematiske miljø i København i perioden sommeren 1823 finansieret ud af professor SØREN RASMUSSEN’s (1768–1850) lomme. ([Stubhaug 1996](#), 273, 589)

⁴⁷ “Je me propose, dans ce mémoire, de considérer la fonction inverse, c’est-à-dire la fonction $\phi\alpha$, déterminée par les équations

$$\begin{aligned}\alpha &= \int \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}} \text{ et sl} \\ \sin\theta &= \phi(\alpha) = x.\end{aligned}$$

[...] En supposant, que $\phi\alpha = x$, on aura en vertu de ce qui précède:

$$\alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}. \text{ } (\text{Abel 1827, 102–103})$$

ABEL betragtede altså inversion af elliptiske integraler af første art (se tabel 2.1) — for hvilke standard formen hos ABEL var (2.2). De derved fremkomne funktioner kaldte han *elliptiske funktioner* (af første art)⁴⁵. Overgangen til at betragte de omvendte funktioner kan i dag synes ganske åbenlys, men for den store mester indenfor feltet, LEGENDRE, var det en hindring til at forstå ABEL's argumenter, som han aldrig overkom⁴⁶. Og skiftet havde virkelig vidtrækkende fordele. For eksempel kunne EULER's additionssætning nu ganske enkelt udtrykkes som

$$\phi(x) + \phi(y) = \phi(z),$$

hvor z var givet algebraisk ved x og y . Netop *additionsformler* skulle komme til at indtage en meget central placering i ABEL's videre studier af de elliptiske funktioner.

Som ABEL bemærkede, var denne *inversion* gyldig på intervallet fra 0 til $\frac{1}{c}$, hvor integranden var positiv⁴⁷. Ved at substituere $-x$ for x fandt han, at inversionen også gjalt for intervallet fra $-\frac{1}{c}$ til 0, idet ϕ var en ulige funktion. ABEL indførte så værdien, som kaldes det *første fuldstændige integral*,

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \quad (2.3)$$

og havde altså fundet værdien af $\phi(\alpha)$ for $\alpha \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$.

Elliptiske funktioner af en imaginær variabel. Hvis inversionen beskrevet ovenfor var et problem for ABEL's samtidige, så kan man som moderne læser forbløffes over hans næste skridt. Han skrev ganske simpelt:

“Ved i (1.) [dvs. ligningen $\phi\alpha = x$] at sætte xi i stedet for x (hvor i , for kortheds skyld, repræsenterer den imaginære størrelse $\sqrt{-1}$) og betegne værdien af α med βi , så bliver

$$xi = \phi(\beta i) \text{ og } \beta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

β er reel og positiv, når x ligger mellem 0 og $\frac{1}{e}$ ”⁴⁸

Som det fremgår af citatet udførte ABEL altså en formel, imaginær substitution i integralet. I analogi med det første fuldstændige integral (2.3) indførte han da

$$\frac{\bar{\omega}}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\partial x}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

⁴⁵Tidligere, f.x. hos LEGENDRE havde termen *elliptiske funktion* også været benyttet for det, jeg her konsekvent har benævnt *elliptiske integraler*. Efter ABEL blev denne skelnen almindelig praksis.

⁴⁶(Ore 1957, 187).

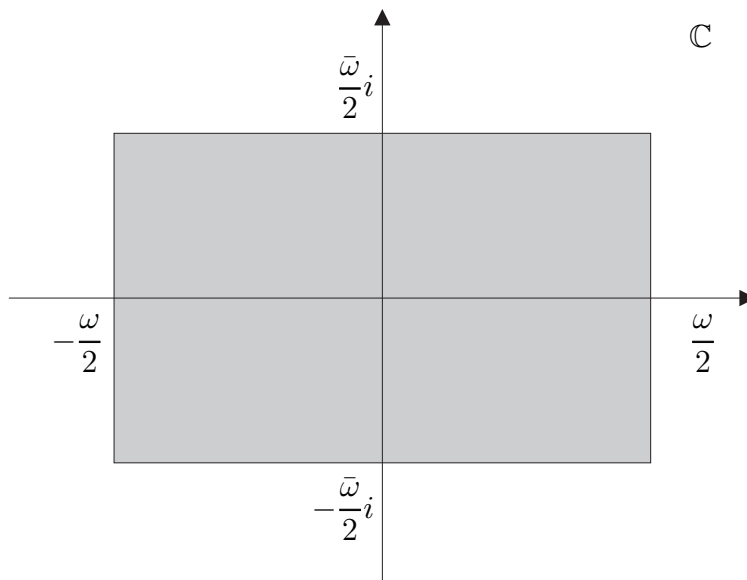
⁴⁷ABEL's inversion er fremstillet i (Nørgaard 1990, kap. 1).

⁴⁸“En mettant dans (1.) xi au lieu de x (ou i , pour abrégé, représente la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$) et désignant la valeur de α par βi , il viendra

$$xi = \phi(\beta i) \text{ et } \beta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

β est réel et positif depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{e}$ ” (Abel 1827, 104)

som betegnes det *andet fuldstændige integral*. Centralt for ABEL's argumentation var det, at han derved *fandt* værdien af funktionen ϕ for $\alpha = \beta i$ hvor $\beta \in [-\frac{\bar{\omega}}{2}, \frac{\bar{\omega}}{2}]$. Der er ikke tale om, at ABEL *definerede* værdien af ϕ for imaginære argumenter, men derimod *afdækkede* eller *fandt* han disse værdier ved ovenstående imaginære substitution (se endvidere nedenfor).



Figur 2.1: ABEL's udvidelse til det komplekse rektangel

Efter således at have *fundet* værdien af funktionen ϕ for argumenter i intervaller på den reelle og den imaginære akse fortsatte ABEL til at *finde* værdien af ϕ for argumenter af formen $\alpha + \beta i$ hvor $\alpha \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$ og $\beta \in [-\frac{\bar{\omega}}{2}, \frac{\bar{\omega}}{2}]$. Med en geometrisk opfattelse af de komplekse tal, som ABEL ikke viste noget tegn på at benytte, endelige have⁴⁹, er der altså tale om at bestemme ϕ på rektanglet illustreret på figur 2.1. ABEL bestemte værdien af ϕ på dette komplekse rektangel ved hjælp af de centrale additionsformler for ϕ . Disse havde han udledt ved blandt andet at differentiere funktionen ϕ , og hvis de således skal have gyldighed for imaginære argumenter, har han altså implicit involveret en differentiation af en kompleks funktion.

Det sidste trin i ABEL's introduktion af funktionen ϕ bestod i at bestemme ϕ 's værdi for *samlige* komplekse argumenter. Til dette benyttede han den dobbelte periodicitet af ϕ , som han havde udledt fra additionsformlerne og en bestemmelse af singulariteterne (nulpunkter og poler) for den elliptiske funktion ϕ .

ABEL's tilgang til den elliptiske funktion ϕ kan altså karakteriseres ved følgende oversigt:

1. ABEL indførte den elliptiske funktion, $\phi(\alpha) = x$, som den *omvendte funktion* af integralet $\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$ på intervallet $\alpha \in [0, \frac{\omega}{2}]$.

⁴⁹Man kan se af udlånsprotokollerne fra Universitetsbiblioteket i Christiania, at ABEL har haft lånt det nummer af *Det kongelige danske Videnskabernes Selskabs Skrifter*, hvori WESSEL's afhandling (Wessel 1799) var trykt. Det er dog mest sandsynligt, at ABEL lånte nummeret for at konsultere en afhandling af DEGEN (Degen 1799) deri. Hvis ABEL på noget tidspunkt læste WESSEL's geometriske fortolkning af komplekse tal, gjorde han på intet tidspunkt brug af den.

2. Da integralet var en ulige funktion, var $\phi(-\alpha) = -\phi(\alpha)$, og ABEL havde bestemt ϕ på intervallet $[-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$.
3. Ved at foretage en imaginær substitution $x \mapsto xi$ i integralet, fandt ABEL værdien af $\phi(\beta i)$ for $\beta \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$.
4. Ved hjælp af additionsformler for ϕ , som han havde bevist ved hjælp af bl.a. differentiation af ϕ , fandt ABEL værdien af $\phi(\alpha + \beta i)$ for $\alpha \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$ og $\beta \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$.
5. Endelig, ved hjælp af den dobbelte periodicitet af ϕ , som ABEL også havde bevist ud fra additionsformlerne, fandt han værdien af $\phi(\alpha)$ for et vilkårligt komplekst tal α .

Man ser således, at ABEL trinvist afdækkede funktionen ϕ 's værdier for større og større klasser af argumenter. Der var ikke tale om, at han *definerede* disse værdier. I stedet lå funktionen ϕ som objekt fast og opgaven var at bestemme dens værdier⁵⁰. Denne *totalitet* af domænet (her hele det komplekse domæne) indenfor hvilket forskriften for funktionen ϕ og dens additionsformler er gyldige er helt i tråd med EULER's funktionsbegreb (se afsnit 2.2.1). Den formelle, imaginære substitution er et andet eksempel på 1700-tals argumentation og er helt på linje med, for eksempel, EULER og LAPLACE⁵¹. Omtrent samtidig puslede CAUCHY med sin teori for integration af komplekse funktioner, men der er altså ikke tale om, at ABEL på dette område fulgte CAUCHY i dennes kritiske revision af analysen. Til brug for frontforskningen synes ABEL at have været tilfreds med 1700-tallets stringens, hvilket også bekræftes af hans temmelig løselige omgang med rækker indenfor teorien for elliptiske funktioner.

At de objekter, ABEL's inversion således indførte, var vigtige at studere, var 1800-tals matematikerne ret enige om. Men deres grundlag — deres definition — var en kilde til megen nyskabende matematik. Flere forskellige ting blev langt til grund for definitioner, f.x. kvotienter mellem uendelige rækker eller produkter og differentiaalligninger, før man — i en fortolkning byggende på GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN's (1826–1866) tilgang til komplekse funktioner — endte med at ophøje den dobbelte periodicitet sammen med funktionens meromorfe natur til en definition. Hos ABEL havde såvel periodiciteten som singulariteternes form været *egenskaber*, som han med stor møjle havde udledt, og de fleste moderne tilgange til elliptiske funktioner truer således med fuldstændig at skjule ABEL's opfattelse af objekterne.

Lemniskatens deling og ABEL's algebraiske tilgang⁵². Blandt ABEL's inspiration til *Recherches sur les fonctions elliptiques* træder GAUSS' værk *Disquisitiones arithmeticae* frem. Deri havde GAUSS bevist, hvorledes cirkelns periferi kunne deles i n lige store dele med passer og lineal når n var et produkt af en 2-potens og forskellige FERMAT primtal⁵³. GAUSS havde ved samme lejlighed fremført, at tilsvarende resultater kunne opnås for

⁵⁰Dette *Abelske funktionsbegreb*, hvorved betydningen af ϕ afdækkes ved substitutionsoperationen og ikke omvendt, er glimrende beskrevet i (Nørgaard 1990, kap. 1, især p. 22).

⁵¹(Smithies 1997, 10–23).

⁵²De ligningsteoretiske aspekter af dette afsnit er også behandlet i bilagets kapitel ??.

⁵³(Gauss 1986, 460).

kurver, hvis rektifikation afhang af lemniskat-integralet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad (2.4)$$

som ses at være et elliptisk integral af første art. Det fremgår af udlånsprotokoller, at ABEL læste GAUSS' bog i 1823–1824⁵⁴ og *Recherches sur les fonctions elliptiques* (Abel 1827; Abel 1828b) kan ses som ABEL's bestræbelser på at udfylde det af GAUSS stillede problem. Allerede GIULIO CARLO FAGNANO DEI TOSCHI (1682–1766) havde løst delingsproblemet for lemniskaten i tilfældet, hvor antallet af dele var et lige tal.

Baseret på additionsformlerne opnåede ABEL at omformulere delingsproblemet for en generel elliptiske funktion af første art, ϕ , i et ulige antal dele til løsningen af en ligning, som han skrev som

$$\phi((2n+1)\beta) = \frac{P_{2n+1}(\phi(\beta))}{Q_{2n+1}(\phi(\beta))}, \quad (2.5)$$

af grad $(2n+1)^2$. Selvom denne lignings rødder altså ikke var algebraisk kendte, havde ABEL et omfattende kendskab til dem. Dette satte ham i stand til at reducere løsningen af denne ligning til løsning af ligninger af lavere grad — en idé han senere skulle videreudvikle i afhandlingen *Mémoire sur une classe particulière* (Abel 1829a) (se afsnit 2.2.3). Derved fik ABEL vist, at delingsproblemet (2.5) lod sig løse algebraisk, hvis man blot kunne løse ligningen $P_{2n+1}(\phi(\beta)) = 0$ algebraisk, svarende til delingen af de *fuldstændige integraler*. Efter møjsommelige udregninger fik han så også udledt, at selvom denne ligning generelt ikke lod sig løse algebraisk, så var en sådan løsning mulig i det specielle tilfælde, der svarer til lemniskat-integralet (2.4). Endvidere inddrog den algebraiske løsning i dette tilfælde ikke andet en kvadratrødder, så ABEL kunne gentage GAUSS' udsagn om delingen af cirklen blot for lemniskaten: Buelængden af lemniskaten lader sig dele i n lige store stykker med passer og lineal, hvis n er et produkt af en 2-potens og forskellige FERMAT primtal.

Hele denne *algebraiske* tilgang til de elliptiske funktioner kan ved første øjekast synes mærkelig. Men jeg er ikke i tvivl om, at delingsproblemet var en central motiverende faktor for ABEL. Det er også et faktum, at delingsproblemet for elliptiske funktioner først gav ABEL den indsigt, han siden udviklede i sit ligningsteoretiske arbejde *Mémoire sur une classe particulière*. Omvendt gav ligningsteorien også afkast til ABEL's algebraiske tilgang til elliptiske funktioner. At opfattelsen af elliptiske funktioner senere i 1800-tallet i høj grad fokuserede på deres *analytiske* sider, er blot et udtryk for, at man senere kom til at betragte *grundlaget* for studiet af disse objekter som usikkert, og at der også i analytiske aspekter var interessante egenskaber at komme efter (se nedenfor).

Transformationsteori og integrationsteori. Blandt de områder af ABEL's matematik jeg har det mindste førstehånds-kendskab til, er hans arbejder indenfor transformationsteori for elliptiske funktioner og integrationsteori for algebraiske differentialformer.

Transformationsteorien var vigtig for LEGENDRE's numeriske tilgang til de elliptiske funktioner, men synes at have spillet en mindre rolle for ABEL's oprindelige, algebraiske tilgang. Først ved starten af kappestriden med JACOBI, dvs. stort set efter *Recherches sur les fonctions elliptiques*, begyndte ABEL at beskæftige sig med transformationsteori.

⁵⁴(Stubhaug 1996, 289–290).

Kappestriden med JACOBI er også interessant fordi den kaster nyt lys over ABEL's inversion beskrevet ovenfor. JACOBI's første publikation havde form af sætninger uden beviser kommunikeret i breve og indrykket i HEINRICH CHRISTIAN SCHUMACHER's (1780–1850)⁵⁵ *Astronomische Nachrichten*. Senere (og efter ABEL's offentliggørelse af *Recherches* 1827) offentliggjorde JACOBI sine beviser, som byggede afgørende på inversionen. CARL ANTON BJERKNES (1825–1903)⁵⁶ har omfattende og afgørende argumenteret for ABEL's prioritet angående denne inversion⁵⁷. Men JACOBI's brug af inversionen og hans revision af ABEL's grundlag for de elliptiske funktioner, som han i stedet baserede på de såkaldte ϑ -rækker, er et nærmere studium værd. Det kan dels kaste lys over inversionens "nødvendighed" og dels tjene til at beskrive receptionen af ABEL's inversion i hans samtid.

ABEL er også kendt for sin generalisering af studiet af elliptiske integraler til de såkaldte *Abelske* integraler. I sin berømte *Parisafhandling* (Abel 1826d) betragtede ABEL disse integraler af formen

$$\int f(x, y) dx, \quad (2.6)$$

hvor f var en rational funktion og x og y var relaterede ved en algebraisk ligning $\chi(x, y) = 0$. Ved hjælp af algebraiske overvejelser i stil med de ovenfor beskrevne, fandt han, at summen af vilkårligt mange (N) sådanne integraler

$$\sum_{n=1}^N \int_0^{x_n} f(x, y) dx$$

kunne skrives som en sum af lignende integraler, hvori antallet kun afhang af χ og hverken af funktionen f eller de valgte grænser, samt algebraisk-logaritmiske funktioner,

$$\sum_{n=1}^N \int_0^{x_n} f(x, y) dx = \sum_{n=1}^{N_\chi} \int_0^{z_n} f(x, y) dx + \text{algebraisk-logaritmiske led,}$$

hvor z_1, \dots, z_{N_χ} var bestemt algebraisk i x_1, \dots, x_N .

ABEL anvendte dette meget generelle resultat på flere måder. Dels viste han, at hvis integralet (2.6) var elliptisk, dvs. bestemt ved

$$0 = \chi(x, y) = y^2 - R_4(x),$$

så var $N_\chi = 1$, hvorved han opnåede at bevise at enhver sum af N elliptiske integraler kunne skrives som et enkelt integral (hørende til et algebraisk givet argument) og algebraisk-logaritmiske led. ABEL generaliserede også til hyper-elliptiske integraler, bestemt ved

$$0 = \chi(x, y) = y^2 - R(x),$$

hvor graden af R oversteg 4, og fandt for disse, at

$$N_\chi = \text{heltalsdelen af } \frac{\deg R - 1}{2}.$$

⁵⁵Personoplysninger fra (Stubhaug 1996, 590).

⁵⁶Personoplysninger fra (Stubhaug 1996, 578).

⁵⁷(Bjerknes 1885, 124–145).

Opsummering. ABEL's arbejder med elliptiske funktioner (og generalisationer heraf) indtager en central plads i min tilgang til hans forfatterskab af flere grunde:

1. ABEL's inversion af elliptiske integraler til elliptiske funktioner og den efterfølgende udvidelse til komplekse funktioner er udført i en rent formel stil, der ligger langt fra det fokus på et numerisk lighedsbegreb, som senere fik så stor udbredelse, og som ABEL også selv advokerede for i rækketeorien. Store dele af den videre udvikling af analysen i 1800-tallet handlede om at give en mere stringent mening til disse objekter.
2. I sine arbejder med elliptiske funktioner involverede ABEL fra tid til anden uendelige rækker. Men hans behandling af disse var langt fra så stringent, som man måske kunne tro ud fra hans kritiske breve og beviset for binomialformelen. Det kunne se ud til, at han anvendte to forskellige standarder for stringens i grundlags- og frontforskning.
3. Den algebraiske tilgang til elliptiske funktioner ligger meget tæt op ad ABEL's arbejder i ligningsteori, og der er gentagne udvekslinger de to områder imellem. Dette hjælper med til at forstå for eksempel motivationen for artiklen *Mémoire sur une classe particulière* (Abel 1829a).
4. I transformationsteori og især i generaliseringen til integration af mere generelle algebraiske differentialer, synes den algebraiske og den analytiske tilgang at mødes i et frugtbart samspil.

Indtil nu har mine undersøgelser af de elliptiske funktioner især drejet sig om inversionen, delingsproblemet og relationerne til ABEL's ligningsteori. Jeg agter snarest (!) at kaste mig over transformationsteori og måske især de *Abelske* integraler.

2.2.3 Ligningsteori

ABEL's ligningsteori har været det altoverskyggende emne for mit arbejde i 1999. Dette arbejde er dokumenteret i bilaget "NIELS HENRIK ABEL and the theory of equations", som er vedlagt denne progress rapport. Formålet med at skrive et bilag på den valgte form og med det pågældende omfang, var at udarbejde en af de tre emne-søjler i et sådan omfang, at kun mindre revisioner vil være nødvendige før den kan indgå i den færdige afhandling. Det er dog åbenlyst, at introduktionen, konklusionen og afsnit omhandlende samspillet med elliptiske funktioner skal undergå større forandringer.

Femtegradsligningens uløselighed. ABEL's første og vel berømteste bidrag til ligningernes teori er hans bevis for umuligheden af at løse den generelle femtegradsligning algebraisk (Abel 1824; Abel 1826b). Dette arbejde kombinerede en "permutationsteoretisk" søjle inspireret af LAGRANGE og CAUCHY med en klassifikation af algebraiske udtryk, som kunne optræde i en eventuel løsningsformel.

Fra LAGRANGE hentede ABEL ideen om at tælle antallet af "værdier" en rational funktion af flere argumenter kunne tage, når man permuterede disse argumenter. Hos CAUCHY fandt han foruden en notation og terminologi til at holde rede på permutationer, en vigtig sætning, som han selv gav et kortere bevis for. Denne sætning udelukkede —

for femtegradsligningen — ikke-symmetriske funktioner i løsningsformelen som havde andet end 2 eller 5 forskellige værdier under permutationer. Byggende på en klassifikation af algebraiske udtryk beviste ABEL, at ethvert algebraisk udtryk i koefficienterne, som måtte forekomme i en løsningsformel, måtte være et rationalt udtryk i ligningens rødder. Omhyggeligt karakteriserede han ethvert sådant algebraisk udtryk i en tænkt løsningsformel og reducerede alle disse til to standardformer. Ved i et modstridsargument at betragte de “inderste” roduddragninger af primtalsgrad kunne han endelig bringe antagelsen om eksistensen af en algebraisk løsningsformel til en modstrid ved at sammenligne forskellige måder at tælle antallet af forskellige værdier under permutationer på.

25 år før ABEL offentliggjorde sit umulighedsbevis havde den italienske matematiker PAOLO RUFFINI forsøgt at bevise samme resultat uden at hans bevis opnåede bred anerkendelse. Da ABEL, uafhængigt af RUFFINI, offentliggjorde sit bevis blev det også udsat for kritik, men på et *lokalt* plan. Matematikere kritiserede og forbedrede dele af beviset, men i hvert fald på Kontinentet syntes *budskabet* om umuligheden af at løse femtegradsligningen algebraisk hurtigt at være blevet accepteret. ABEL's bevis havde nogle klare fordele i forhold til RUFFINI's, for eksempel *beviste* ABEL en central hjælpesætning, som RUFFINI havde antaget uden bevis. En anden forskel ligger i mediet for publikation, hvor ABEL — takket være en fremskyllende bølge af tysk matematik — nåede bred udbredelse ganske hurtigt.

Argumentet, som ABEL blev præsenterede det i CRELLE's *Journal* (Abel 1826b), var skræddersyet til at bevise umuligheden af generelt algebraisk at løse ligninger af højere grad en fire. Undervejs gjorde ABEL dog brug af nogle af de begreber, der fik central betydning i hans andre ligningsteoretiske arbejder: den euklidiske divisionsalgoritme og irreducibilitets-begrebet.

Abelske ligninger. ABEL's eneste anden publikation indenfor “yndlingsfeltet” ligningsteori var den allerede nævnte artikel *Mémoire sur une classe particulière* (Abel 1829a). I den præsenterede han et resultat af en anden type. Umulighedsbeviset havde været et *negativt* resultat, der havde sagt noget om begrænsningen på extensionen af begrebet *algebraisk opløselighed*. Men i (Abel 1829a) beviste ABEL for en bestemt klasse af ligninger, at disse lod sig løse algebraisk.

I *Mémoire sur une classe particulière* betragtede ABEL en ligning

$$\phi(x) = 0 \tag{2.7}$$

i hvilken der eksisterede en *rational* relation mellem to af rødderne x og x' ,

$$x' = \theta(x).$$

Ud fra begrebet *irreducibel ligning*, som han indførte og studerede, og divisionsalgoritmen, kunne ABEL bevise om den irreducible ligning $\phi(x) = 0$ af nævnte type, at enhver iteration $\theta^k(x)$ også ville være en rod i $\phi(x) = 0$, samt at alle rødderne faldt i lige lange kæder.

Når ligningens grad var $\mu = m \times n$, beviste ABEL at man kunne reducere løsningen af ligningen $\phi(x) = 0$ til løsning af ligninger af grad m og n , hvoraf kun den ene ligning af grad n eventuelt kunne være umulig at løse algebraisk. Dette beviste han ved at bevise, at

enhver ligning, hvori alle rødderne falder i den samme kæde under θ — rødderne skal altså være på formen $x, \theta(x), \dots, \theta^{\mu-1}(x)$ hvor $\theta^\mu(x) = x$ — vil være algebraisk opløselige.

ABEL generaliserede da til en situation, hvor alle rødder i ligningen (2.7) kunne udtrykkes rationalt i en enkelt rod, altså hvor rødderne var $x, \theta_1(x), \dots, \theta_{\mu-1}(x)$. Han beviste så, ved at reducere til det foregående tilfælde, at hvis

$$\theta_i \theta_j(x) = \theta_j \theta_i(x),$$

så kunne ligningen løses algebraisk. Disse ligninger er kommet til at hedde *Abelske* ligninger.

Under udarbejdelsen af afhandlingen havde ABEL to vigtige anvendelser af disse studier for øje. Dels ville han gengive GAUSS' resultat for cirkeldelingen i denne mere generelle teori, og dels ville han anvende teorien på elliptiske funktioner. Uheldigvis blev den sidste anvendelse aldrig publiceret i forbindelse med det ligningsteoretiske arbejde, men det er mit håb, at man kan finde spor deraf i ABEL's arbejder om transformationsteori for elliptiske funktioner, især (Abel 1829b).

Algebraisk opløselige ligninger. I en af ABEL's efterladte notesbøger findes en afhandling, hvis formål det var fuldstændig at afklare extensionen af begrebet *algebraisk opløselighed*. Den byggede på central vis på begrebet *irreducibel ligning* og indeholder en række resultater, der udtrykker første konsekvenser af irreducibilitet.

Den bærende idé i notesbogen, hvoraf kun den første del er gennemskrevet og i en publicérbar tilstand, var at karakterisere den irreducible ligning, som et givet algebraisk udtryk opfylder. Denne karakterisering har form af en konstruktion, hvorved egenskaber for den irreducible ligning udledes fra egenskaber ved det givne algebraiske udtryk.

Efter at have konstrueret den irreducible ligning vendte ABEL endnu en gang sin tilgang på hovedet og gik tilbage til at undersøge formen af algebraiske udtryk, som kunne tilfredsstille en given irreducibel ligning af primtalsgrad. Han ville egentlig gerne have betragtet helt generelle irreducible ligninger, men som han skriver:

“Saalænge Ligningens Grad er et Primtall har det ikke saa megen Vanskelighed, men naar den er et sammensat Tal er Pokker løs.”⁵⁸

Efter en lang række argumenter, hvoraf den sidste del kun er ligninger, som er forsøgt rekonstrueret i bilagets afsnit ??, nåede ABEL frem til, at det yderste radikal i en løsning til en irreducibel ligning af primtalsgrad tilfredsstiller en irreducibel *Abelsk* ligning, hvis grad er en divisor i $\mu - 1$. Så langt nåede han i sine undersøgelser om algebraisk løsbare ligninger. Det blev i stedet GALOIS, der kom til at løse dette problem, og 1800-tallets matematikere investerede store anstrengelser i at forstå og formidle GALOIS' arbejder på en acceptabel og stringent måde.

Opsummering. ABEL's ligningsteori gennemsyrrer, som nævnt, store dele af hans arbejde med elliptiske funktioner. Men hans ligningsteori, *per se*, omfatter stort set kun tre arbejder: umulighedsbeviset, studiet af *abelske* ligninger, og notesbogen om algebraisk

⁵⁸(N. H. Abel → B. Holmboe, 1826. Abel 1902a, 15).

opløselig ligninger generelt. Alle disse bygger afgørende på den forrige generation af algebraikere, især LAGRANGE, og inddrager CAUCHY's permutationsteori, der først i begyndelsen af 1800-tallet var ved at nedfælde sig som et selvstændigt matematisk forskningsområde.

Centralt for store dele af ABEL's ligningsteoretiske arbejder var hans brug af begrebet *irreducibel ligning*. Irreducibilitet tjente, hos ABEL, som et begreb på hvilket man kunne fundere generelle sætninger, og selvom ABEL i høj grad benyttede 1700-tallets omfattende symbolregninger i sine beviser, markerede netop irreducibiliteten et skridt mod 1800-tallets mere begrebs-baserede matematik.

2.2.4 Den “manglende” geometri

ABEL's matematiske produktion var centreret omkring de tre ovenfor præsenterede emnekredse: rækketeori, elliptiske funktioner og ligningsteori. Med de skitserede forbindelser til tilstødende områder — f.x. reel analyse, komplekse integration, integrationsteori og permutationsteori — kommer man gennem et studium af ABEL's matematik rundt i de fleste kroge af det matematiske univers, som det så ud i begyndelsen af 1800-tallet. To store og centrale områder bevæger man sig dog udenom: geometri og anvendt matematik.

Anvendt matematik. Den anvendte matematik var især i den franske “polytekniske” matematik af central betydning. “Ren” matematik og fysik eksisterede i en symbiose, der gør det svært — og måske meningsløst — at skelne en fransk matematiker fra en fransk fysiker. På dette punkt var ABEL derimod udpræget tysk; den tyske nyhumanisme fokuserede i høj grad på matematikken som dannelse og i mindre grad på dens anvendelser. I forbindelse med HANSTEEN's undersøgelser af jordens magnetfelt havde ABEL i 1824 arbejdet på at bestemme månens indflydelse på et penduls bevægelse. Da hans resultater blev sendt til SCHUMACHER med henblik på offentliggørelse i *Astronomische Nachrichten*, viste det sig, at ABEL havde glemt at tage hensyn til månens tiltrækning på jordens centrum, og at hans resultat derfor afveg med en faktor 60. Bortset fra denne enkelte lejlighed (som var en fiasko) og en løsning af en enkelt mekanisk opgave i CRELLE's *Journal* ([Abel 1826a](#)) beskæftigede ABEL sig udelukkende med emner fra den rene matematik.

Vægtningen af anvendt matematik i starten af det 19. århundrede var i udpræget grad præget af nationale præferencer. Da ABEL, både hvad angår publikationer og faglig udveksling, placerer sig indenfor den tyske tradition, ser jeg ikke manglen på anvendt matematik som et stort problem, så længe den inddrages i behørigt omfang i beskrivelsen af den franske situation.

Geometri. Noget mere indskrænkende er det, at ABEL ingen direkte berøringsflade havde med den rivende udvikling indenfor geometrien i hans samtid. Denne udvikling ligner på mange områder udviklinger indenfor de felter, ABEL beskæftigede sig med. Også i geometrien blev nye metoder og begreber indført, og begrebernes ekstensioner stod for at skulle afklares. Til tider ledte forskningen til resultater, som syntes uacceptable for den ældre generation af matematikere, for eksempel på grund af udvikling i holdningerne til stringens og grundlag eller fordi resultatet stred mod den etablerede intuition. Disse tendensers manifestationer i geometrien er jeg altså ikke i stand til at indfange gennem studiet af ABEL's matematik. Derfor er det med glæde og forventning jeg ser frem

til i foråret 2000 sammen med KIRSTI ANDERSEN at udbyde kurset *Geometriens historie* ved IVH. Selvom jeg næppe vil komme til at skrive særligt indgående om geometri i min afhandling, glæder jeg mig til på denne måde at få lejlighed til både at studere de lange træk og gå i detaljer med centrale bidrag til geometrien i 1800-tallet.

2.3 Opsummering

ABEL befandt sig således hverken geografisk eller emnemæssigt på periferien. Matematisk var han nært forbundet til den rene matematik dyrket i den tyske nyhumanisme, og hovedparten af hans publikationer fandt sted i CRELLE's Berlin-baserede *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

På det emnemæssige plan beskæftigede ABEL sig især med tre emner, som hver især kom til at indtage centrale positioner indenfor 1800-tallets matematik. ABEL's arbejder med rækketeori faldt indenfor den stringensbevægelse, der bredte sig i løbet af århundredet og omfattede overvejelser fra CAUCHY til WEIERSTRASS omkring den reelle analyses grundlag (herunder rækketeorien). Teorien for elliptiske funktioner er et af de største enkelte forskningsområder i det 19. århundredes matematik, og ABEL's bidrag var centralt ved at flytte fokus fra de elliptiske integraler til de elliptiske funktioner — en inversion, der fik langtrækkende konsekvenser for områdets fertilitet. Og endelig var hans arbejder med algebraisk løsning af ligninger blandt de første indenfor den blanding af ligningsteori og permutationsteori, som blev muliggjort i de første tiår af det 19. århundrede. Selvom de mest vidtrækkende studier forblev ukendte indtil 1839 udgjorde ABEL's ligningsteoretiske arbejder en forbindelse mellem LAGRANGE og GALOIS.

Med de ovenfor tagne forbehold finder jeg det forsvarligt at sætte ABEL i centrum.

Kapitel 3

Færdiggørelse af ph.d.-projektet

3.1 Ledende spørgsmål

Blandt de mangeartede karakteristika for den enorme matematiske udvikling i starten af 1800-tallet træder nogle frem, som jeg ønsker at belyse gennem detaljerede studier af den matematiske udviklingen omkring ABEL indenfor de tre kernefeltet. Jeg forestiller mig, at hvert af kernefeltene skal belyses med en passende grad af matematisk detalje for så at give mulighed for at diskutere blandt andre følgende tre bredere spørgsmål:

1. Jeg finder den massive introduktion af nye begreber og objekter i matematikken meget interessant. Begreberne blev i stigende grad indført ved (formelle) definitioner, og en stor del af den matematiske forskning bestod derefter i at afklare de indførte begrebers ekstensioner. I disse begrebsafklaringer kan ofte identificeres udvidende og indskrænkende træk, og sætninger og modeksempler vekselvirkede i flere tilfælde på måder, der muliggør fortolkninger indenfor LAKATOS' ramme¹. En sådan fortolkning bliver dog først rigtig historisk interessant, når den konfronteres med de historiske kilder. Således vil jeg gerne nå til at kunne sige noget om matematikernes metoder til begrebers indføring og afklaring i starten af 1800-tallet, herunder også noget om modeksemplets faktiske metodologiske betydning.
2. Jeg ser også i projektets afgrænsning en mulighed for at studere holdninger til den fremvoksende stringens i starten af 1800-tallet. For en matematiker opdraget efter WEIERSTRASS kan det synes som om alle med et slag måtte have accepteret CAUCHY's nye krav til stringens. Men som alt andet har også stringensen sin receptions historie. ABEL's tidlige omvendning og hans arbejde med rækketeorien giver en mulighed for at vinde indsigt i opfattelsen hos de matematikere, der som de første modtog CAUCHY's nye lære. Selvom ABEL beundrede CAUCHY's matematik bemærkede han også en *undtagelse* til en af CAUCHY's sætninger, som understreger de komplikationer, som den fortsatte brug af infinitesimaler betød for CAUCHY's analyse. Og selvom ABEL i sine rækketeoretiske arbejder trofast fulgte CAUCHY fokus på (numerisk) konvergens, indtager konvergensbegrebet og konvergensovervejelser en meget tilbagetrukket position i hans arbejder om elliptiske funktioner, selvom uendelige rækker anvendes ganske meget. Dette kunne antyde en forskel mellem stringenskravene til grundlagsforskning og frontforskning.

¹(Lakatos 1976).

3. I relation til de to foregående punkter om begreber og stringens står et tredje generelt aspekt, som kan belyses indenfor projektet, nemlig udviklingen fra beregningsbaseret til begrebsbaseret matematik. Forskellen er til at få øje på i ligningsteorien, men i teorien for de elliptiske funktioner er den endnu mere tydelig. ABEL's arbejder med elliptiske funktioner var i høj grad funderet i lange, formelle og eksplicitte manipulationer i traditionen fra EULER. Disse involverede et antal operationer, som sammen med forsøg på generaliseringer ledte de følgende generationer til at tage indførelsen af de elliptiske funktioner op og søge at bringe den på et stringent grundlag. Og netop i denne stringent-gørelse ligger en stor del af transitionen til begrebsbaseret matematik, idet de elliptiske funktioner da indføres ved at ophæve hvad ABEL og andre havde betragtet som *egenskaber* til *definitioner*.

3.2 Fremtidsplaner

For at realisere de skitserede ambitioner planlægger jeg efter min kvalifikationseksamen at begynde detaljerede studier af ABEL's arbejder indenfor transformationsteori for elliptiske integraler og integrationsteori, samt disse emners kontekst. Dels håber jeg, at dette studium kan kaste yderligere lys over forbindelsen mellem ligningsteori og elliptiske funktioner, og dels er det en naturlig indgang til kappestriden med JACOBI og yderligere, dybere spørgsmål omkring "nødvendigheden" af inversion af elliptiske integraler til elliptiske funktioner. I foråret udbydes som sagt kurset *Geometriens historie*, som jeg glæder mig til, men som — da det altså er næsten disjunkt med mit projekt — også vil kræve en del forberedelse fra min side.

For at sætte ABEL's arbejder med elliptiske funktioner og stringensbevægelsen i analysen i starten af 1800-tallet ind i deres rette perspektiv ønsker jeg på del-B at tilbringe tid hos en af eksperterne indenfor disse områder, for eksempel JEREMY GRAY eller UMBERTO BOTTAZZINI. Endvidere planlægger jeg i sommeren 2000 et ophold i Oslo for at få adgang til ABEL-relaterede arkivalier der og et kort ophold i Stockholm for at få adgang til ABEL-manuskripter, som jeg ved opbevares på *Mittag-Leffler Instituttet*.

Litteratur

- Abel, N. H. (1824). *Mémoire sur les équations algébriques, on l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré* (new ed.). Volume 1 of [Abel \(Œuvres₂\)](#). First published Christiania: Grøndahl.
- Abel, N. H. (1826a). Auflösung einer mechanischen Aufgabe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1(2), 153–157.
- Abel, N. H. (1826b). Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden, als dem vierten, allgemein aufzulösen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1(1), 65–84.
- Abel, N. H. (1826c). Démonstration de l'impossibilité de la résolution des équations algébriques générales d'un degré supérieur au quatrième; par M. Abel. (*Journ. der Mathemat.*, de M. Crelle; t. I, p. 65.). *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques* 6, 347–354.
- Abel, N. H. (1826d). Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes. In volume 1 of [Abel \(Œuvres₂\)](#), Chapter 12, pp. 145–211. First published *Mémoires présentés par divers savants*, t. VII, 1841.
- Abel, N. H. (1826e). Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2}x^2 + \frac{m \cdot (m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^3 \dots$ u.s.w. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1(4), 311–339.
- Abel, N. H. (1827). Recherches sur les fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 2(2), 101–181.
- Abel, N. H. (1828a). Note sur le mémoire de Mr. L. Olivier No. 4. du second tome de ce journal, ayant pour titre “remarques sur les séries infinies et leur convergence”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 3(1), 79–82.
- Abel, N. H. (1828b). Recherches sur les fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 3(2), 160–190.
- Abel, N. H. (1829a). Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4(2), 131–156.
- Abel, N. H. (1829b). Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4(4), 236–277, 309–348.
- Abel, N. H. (1839). Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes. In volume 2 of [Abel \(Œuvres₂\)](#), pp. 67–81. First published 1839 in ([Abel Œuvres₁](#)).
- Abel, N. H. (1902a). Breve fra og til Abel. In [Holst, Størmer, and Sylow \(1902\)](#).
- Abel, N. H. (1902b). Breve om Abel. In [Holst, Størmer, and Sylow \(1902\)](#).

- Abel, N. H. (*Œuvres*₁). *Oeuvres Complètes de N. H. Abel, mathématicien, avec des notes et développements*. Christiania: Chr. Grøndahl. 1839. 2 vols. Edited by B. M. Holmboe.
- Abel, N. H. (*Œuvres*₂). *Oeuvres Complètes de Niels Henrik Abel* (new ed.). Christiania: Grøndahl. 1881. 2 vols. Edited by L. Sylow and S. Lie.
- Barbeau, E. J. and P. J. Leah (1976). Euler's 1760 paper on divergent series. *Historia Mathematica* 3, 141–160.
- Begehr, H. G. W., H. Koch, J. Kramer, N. Schappacher, and E.-J. Thiele (Eds.) (1998). *Mathematics in Berlin*. Berlin, Basel, Boston: Birkhäuser Verlag.
- Biermann, K.-R. (1988). *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810–1933. Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung*. Berlin: Akademie-Verlag Berlin.
- Bjerknes, C.-A. (1885). *Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique*. Paris: Gauthier-Villars.
- Bolzano, B. (1816). *Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen*. Prag: C. B. Endersches Buchhandlung. Photographic reproduction in *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum* vol. 12, 1981, p. 253–415.
- Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag.
- Bottazzini, U. (Ed.) (1990). *Augustin-Louis Cauchy: Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie. Analyse Algébrique*. Number VII in *Instrumenta Rationis. Sources for the History of Logic in the Modern Age*. Editrice CLUEB Bologna.
- Brun, V. (1953). Det gjenfunne manuskript til Abels Parisavhandling. *Nordisk Matematisk Tidsskrift* 1, 91–97.
- Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie. Analyse Algébrique*. Paris: L'Imprimerie Royale. Photographic reproduction in (Bottazzini 1990).
- Cauchy, A.-L. (1822). Sur le développement des fonctions en séries et sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles. In volume 2 of Cauchy (*Œuvres*), pp. 276–282. First published *Bulletin de la Société Philomatique*, p. 49–54; 1822.
- Cauchy, A.-L. (1853). Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. In volume 12 of Cauchy (*Œuvres*), pp. 30–36. Read to the Académie des Sciences on March 14, 1853 and originally published *Comptes Rendus* vol. XXXVI p. 454.
- Cauchy, A.-L. (*Œuvres*). *Œuvres Complètes d'Augustin Cauchy*. Paris: Gauthier-Villars. 1882–1974. 12+15 vols.
- Crelle, A. L. (1826). Vorrede. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1(1), 1–4.

- Degen, C. F. (1799). Et Bidrag til Æquationernes Theorie. *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* 5, 572–582.
- Dhombres, J. (1985). French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy. *Historia Scientiarum* 28, 91–137.
- Dirichlet, L. (1829). Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4(2), 157–169.
- Fraser, C. G. (1987). Joseph Louis Lagrange's Algebraic Vision of the Calculus. *Historia Mathematica* 14(1), 38–53.
- Gauss, C. F. (1986). *Disquisitiones Arithmeticae. English Edition*. New York — Berlin — Heidelberg — Tokyo: Springer-Verlag.
- Grabiner, J. V. (1981a). Changing Attitudes Toward Mathematical Rigor: Lagrange and Analysis in the Eighteenth and Nineteenth Centuries. In H. N. Jahnke and M. Otte (Eds.), *Epistemological and Social Problems in the Sciences in the Early Nineteenth Century*, pp. 311–330. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Grabiner, J. V. (1981b). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.
- Grattan-Guinness, I. (Ed.) (1994a). *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*. London: Routledge. 2 vols.
- Grattan-Guinness, I. (1994b). France. In volume 2 of [Grattan-Guinness \(1994a\)](#), Chapter 11.1, pp. 1430–1441. 2 vols.
- Hauch, M. (1997, Jun.). Bernard Bolzano. Bolzanos tidlige matematiske arbejder set i relation til hans matematikfilosofi. Specialeopgave, Institut for de Eksakte Videnskabers Historie, Aarhus Universitet.
- Holst, E., C. Størmer, and L. Sylow (Eds.) (1902). *Festskrift ved Hundreaarsjubilæet for Niels Henrik Abels Fødsel*. Kristiania: Jacob Dybwad.
- Houzel, C. (1986). Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes. In J. Dieudonné (Ed.), *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Chapter 7, pp. 293–314. Paris: Hermann.
- Jahnke, H. N. (1993). Algebraic Analysis in Germany, 1780–1840: Some Mathematical and Philosophical Issues. *Historia Mathematica* 20(3), 265–284.
- Knobloch, E. (1998). Mathematics at the Prussian Academy of Sciences 1700–1810. In [Begehr, Koch, Kramer, Schappacher, and Thiele \(1998\)](#), pp. 1–8.
- Lagrange (1770–1771). Réflexions sur la Résolution algébrique des équations. In *Œuvres de Lagrange*, Volume 3, pp. 203–421. Paris: Gauthier-Villars. First published *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1770–1771.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Laugwitz, D. (1987). Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. *Historia Mathematica* 14, 258–274.

- Laugwitz, D. (1988–89). Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820. *Archive for History of Exact Sciences* 39, 195–245.
- Laugwitz, D. (1989). Grundlagen der Analysis bei C. F. Gauß: I. Trigonometrische Reihen. *Mathematische Semesterberichte* 36(2), 159–174.
- Lützen, J. (1978). Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet. *Nordisk Matematisk Tidsskrift* 25/26(1), 5–32.
- Nørgaard, S. (1990). Elliptiske funktioner og kompleks funktionsteori 1825-1860. Aspekter af inversionsproblemet for elliptiske integraler set i relation til udviklingen af en kompleks funktionsteori i Frankrig. Speciale, Institut for de Eksakte Videnskabers Historie, Aarhus Universitet.
- Olivier, L. (1827). Remarques sur les séries infinies et leur convergence. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 2, 31–44.
- Ore, O. (1957). *Niels Henrik Abel. Mathematician Extraordinary*. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- Rowe, D. E. (1998). Mathematics in Berlin, 1810–1933. In [Begehr, Koch, Kramer, Schappacher, and Thiele \(1998\)](#), pp. 9–26.
- Schubring, G. (1981). The Conception of Pure Mathematics as an Instrument in the Professionalization of Mathematics. In H. Mehrtens, H. Bos, and I. Schneider (Eds.), *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, pp. 111–134. Boston — Basel — Stuttgart: Birkhäuser.
- Schubring, G. (1994). Germany to 1933. In volume 2 of [Grattan-Guinness \(1994a\)](#), Chapter 11.2, pp. 1442–1456. 2 vols.
- Seidel, P. L. (1847). Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen. In H. Liebmann (Ed.), *Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen von Lejeune Dirichlet (1837) und Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen von Philipp Ludwig Seidel (1847)*. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann. First published *Abhandl. der Math. Phys. Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, V (1847), 381–394.
- Smithies, F. (1997). *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Stokes, G. G. (1847). On the Critical Values of the Sums of Periodic Series. In *Mathematical and Physical Papers*, Volume 1, pp. 236–313. Cambridge: at the University Press. Read to the Cambridge Philosophical Society on December 6, 1847.
- Stubhaug, A. (1996). *Et foranskutt lyn - Niels Henrik Abel og hans tid*. Oslo: Aschehoug.
- Volkert, K. (1987). Die Geschichte der pathologischen Functionen. Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie. *Archive for History of Exact Sciences* 37(3), 193–232.
- Volkert, K. T. (1986). *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*. Number 3 in Studien zur

Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Weierstrass, K. (1923). Briefe an Paul du Bois-Reymond. *Acta Mathematica* 39, 199–225.

Wessel, C. (1799). Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning. *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* 5, 469–518.