Kædelinjen

HENRIK KRAGH SØRENSEN
hkragh@imf.au.dk

Afløsningsopgave i kurset
Matematikken i 1600-tallet
IVH foråret 1996.

August 1996.
Uændret version 29. juni 2001.

Resumé

Since the Ancient Greeks curves have been studied as part of mathematics. In the Seventeenth Century, though, a new and broader perspective was taken on curves: new techniques to study and describe curves were introduced, and new curves were invented. In this essay I will study one such production of Seventeenth Century curve theory: The Catenary. Approaches representing different mathematical traditions occuring simultanously will be studied and discussed. I hope to describe some changes in the perception of such a mathematical object as a curve. And, hopefully, I will manage to communicate some of the important implications even to present day mathematics.

Indhold

Figurer

1 Indledning med problemformulering

Megen indsigt kan vindes ved at undersøge sammenstød mellem forskellige opfattelser, det være sig faglige, sociale, religiøse eller andre. Nærværende opgave undersøger et eklatant sammenstød mellem to meget vigtige matematiske traditioner; nemlig på den ene side den klassiske 'precalculus' kurveundersøgelse og på den anden side den fremstormende differentialregning. Anledningen er en konkurrence udskrevet i matematikersamfundet i året 1690, omkring bestemmelse af kædelinjens kurve. Jeg vil fremføre løsninger fra begge traditionerne, og dette skulle gerne levere materiale til en sammenligning mellem de to traditioner. En sammenligning, som jeg mener har relevans også for moderne matematikere.

Jeg vil ikke bruge mange kræfter på biografiske beskrivelser af de implicerede personer, så et vist kendskab til 1600-tallets matematik og matematikere vil være at foretrække. Ej heller vil jeg gå nærmere ind på de fysiske antagelser, der ligger bag behandlingen af problemet, og jeg anser disse for enten velkendte eller acceptable.

2 Præsentation af arbejdsmetoder og indhold

Så godt som alt det originale materiale er affattet på latin, dog er nogle breve på fransk. Da jeg ikke mestrer nogle af sprogene specielt godt er jeg taknemmelig for den hjælp til oversættelse, jeg har fået fra forskellig side. Dog forbliver ansvaret for alle fejl og uklarheder i oversættelserne, og i opgave som helhed, alene mit. Jeg bruger overalt figurer, som er identiske med de originale figurer enten fra selve originalmanuskriptet eller fra oversættelser heraf.

Nærværende opgave indledes med en redegørelse for den matematik-historiske udvikling med direkte tilknytning til vores problem, der leder frem til konkurrencens udskrivelse. Derefter vil jeg behandle tre løsningsforslag, som repræsenterer forskellige indfaldsvinkler, og til slut vil jeg gennem sammenligninger med den moderne opfattelse forsøge at kommentere forskellene imellem løsningerne og forskellene frem til i dag.

3 Kurveteori frem til 1650

Kurveundersøgelser kendes i forskellige former helt fra det antikke Grækenland. Her var de undersøgte kurver især keglesnit, som fremkommer ved at snitte en kegle med et plan i forskellige vinkler. Men også andre kurver havde allerede dengang interesse. Her er de vigtigste vel nok ARCHIMEDES'[1] spiral og cissoiden.

Indtil starten af 1600-tallet var kendskabet til og interessen for kurver begrænset til de samme objekter som i oldtiden, men dette skulle dramatisk ændres i løbet af århundredet. Med DESCARTES'[2] *Geometrie* fra 1637 grundlagdes en disciplin, der skulle blive meget omfattende. DESCARTES' bog kan ses som resultatet af et dybt program: Han havde til hensigt at undersøge geometrien

[1] ARCHIMEDES (287? f.Kr.-212 f.Kr.)

[2] RENÉ DESCARTES (1596-1650)

til bunds. For at dette skulle være muligt måtte han indskrænke de undersøgte områder. Derfor var hans kardinalpunkt at skelne mellem kurver, som hørte geometrien til, og kurver der ikke gjorde det. Dette formulerede han kun vagt, og det blev til begreberne henholdsvis geometrisk og mekanisk kurve. Det stod at læse mellem linierne, at disse begreber er, hvad vi i dag kalder algebraiske[3] og trancendente kurver, men der skulle gå 200 år, før dette blev endeligt bevist. I stedet lod DESCARTES en geometrisk kurve være bestemt ved en kontinuert bevægelse. Men også andre beskrivelser kunne under givne omstændigheder give anledning til geometriske kurver. Mest interessant for afsnit 11 er det, at visse punktvise konstruktioner også berettigede til geometrisk accept. Centralt herfor var det, at den punktvise konstruktion ikke blot leverede uendeligt mange punkter på kurven, men faktisk til en vilkårlig værdi af den ene 'koordinat' tillod en geometrisk bestemmelse af den anden.

Da DESCARTES publicerede dette værk, var interessen for kurver allerede for opadgående. Man benyttede kurver i tre forskellige formål: Som et objekt, der kunne studeres, som middel til løsning af geometriske problemer, og som selve løsningen til geometriske problemer. Han forsøgte at lave et hieraki mellem forskellige kurver til klassificering, med det formål at kalde nogle kurver simplere end andre. I 1637 byggede denne klassifikation på graden af den tilhørende ligning, som han antog altid kunne findes for geometriske kurver. Men udviklingen gik stærkt, og specielt den store interesse, som logaritmerne påkaldte sig, tvang matematikerne til at modificere DESCARTES' opdeling. Logaritmerne er som bekendt trancendente, og DESCARTES ville henregne dem til de mekaniske kurver, der dermed ikke kunne bruges i geometriske undersøgelser og problemer. Dette var i oplagt modstrid med deres store anvendelighed, som blev demonstreret allerede i 1660'erne.[4]

4 Kædelinjens historie

4.1 GALILEI, STEVIN, GIRARD, JUNGIUS og HUYGENS

Kædelinjen er den figur, som beskrives, når et tov ophænges frit mellem to faste punkter. Da kædelinjen er en i naturen forekommende figur, lader dens fødselstidspunkt sig ikke fastsætte. Hvad vi derimod kan konstatere, er at den historiske interesse for kædelinjen begynder ved GALILEI[5] og GIRARD[6]. I GIRARD's udgivelse af STEVIN's[7] samlede værker fra 1634 findes en påstand om, at kædelinjen skulle være en parabel[8]. Det samme synes man at finde i GALILEI's store værk *Discorsi e demonstrazioni matematiche intorno a duo nuove scienze* fra 1638[9], hvor der står at

[3] En algebraisk kurve er i dag en kurve, hvis ligning i rektangulære koordinater lader sig udtrykke ved de fire regningsarter og roduddragning.

[4] Dette afsnit indeholder mange generelt accepterede fakta (Mejlbo 1979), men artiklen (Bos 1981) har givet inspiration til meget af det foregående.

[5] GALILEO GALILEI (1564-1642)

[6] ALBERT GIRARD (1595-1632)

[7] SIMON STEVIN (1548-1620)

[8] (Gillispie 1970-80, Jacob Bernoulli)

[9] (Kowalewski 1914, p. 187) og (Gillispie 1970-80, Galilei)

læse

> ...: questa catanella si piega in figura parabolica (Galilei 1933, vol. VIII, p. 186)

hvilket lader sig oversætte til dansk som

> ...: denne kædelinje udstrækker sig i en parabolsk figur

De første år synes man at have læst dette udsagn som at GALILEI hævder, at kædelinjen er en parabel. Men senere hælder man mere til en oversættelse i retningen af, at GALILEI siger, at kædelinjen har en parabel-lignende figur, hvilket jo unægteligt er rigtigt.

At kædelinjen faktisk ikke er en parabel modbevises dog allerede i 1646[10] af den kun 17 år gamle HUYGENS[11], der ved et snedigt statisk-geometrisk argument (se afsnit 5.2) beviser, at dette ikke er muligt. Han er dog ikke i stand til at beskrive kurvens faktiske form.

I 1669[12] indeholder JUNGIUS'[13] bog *Geometrica empirica* et empirisk bevis for, at kædelinjen faktisk ikke er en parabel[14]. Dermed er det endeligt benægtet, at kædelinjen skulle være en parabel, men der skulle gå endnu 20 år, før nogen med held satte sig for at bestemme kædelinjens faktiske form.

4.2 JACOB BERNOULLI og LEIBNIZ, *Acta Eruditorum* 1690

Bestemmelsen af kædelinjens form skulle blive indholdet af en matematisk konkurrence af historisk værdi. JACOB BERNOULLI[15] havde op til 1690 i sin brevveksling med LEIBNIZ[16] diskuteret kædelinjens natur. Han og LEIBNIZ var enige om, at denne kunne bestemmes ved hjælp af den stadig unge differentialregning. Da JACOB BERNOULLI i maj 1690 får trykt sit svar i *Acta Eruditorum*[17] på en opgave stillet af HUYGENS, afslutter han med opfordringen

> Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere suspensus. (Bernoulli 1690)

Igen skal jeg forsøge en oversættelse til dansk, som bliver

[10](Huygens 1646)

[11]CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695)

[12]Omkring dette årstal hersker der uoverensstemmelser. De fleste bøger om kædelinjen ((Loria 1902, p. 574), (Montucla 1968, p. 468)) sætter udgivelsesåret til 1669. Men bogen er faktisk udkommet i 1627 ((Gillispie 1970-80, Jungius), (Leibniz 1995, p. 192)). Min teori, som jeg ikke har kunnet efterprøve, er at den første udgave fra 1627 ikke indeholder afsnittet om kædelinjen, som så kommer til i en senere udgave 1669.

[13]JOACHIM JUNGIUS (1587-1657)

[14]MONTUCLA hævder endda, at JUNGIUS også afkræfter, at kædelinjen kunne være en hyperbel. (Montucla 1968, p. 468)

[15]JACOB BERNOULLI (1654-1705)

[16]GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

[17]*Acta Eruditorum* (lat. De lærdes Tidsskrift) oprettedes i 1688 og publicerede i starten mange af LEIBNIZ' resultater. (Gillispie 1970-80, Leibniz)

> At finde ud af, hvilken kurve, der beskrives af et løst tov frit svævende mellem to fastholdte punkter.

Den oprindelige svarfrist var 6 måneder, men måtte forlænges med yderligere 6 måneder, før de indkomne løsninger kunne offentliggøres. I løbet af det år, der således går mellem konkurrencens udskrivelse og offentliggørelsen af løsningerne, skaber opgaven aktivitet blandt de store matematikere. Den drøftes i brevvekslingerne, og heri gives kurven endda sig eget navn: *Catenaria*[18]. Konkurrencen skulle blive en af de store matematiske begivenheder i slutningen af det 17. århundrede, og LEIBNIZ sammenlignede den endda selv med PASCAL's[19] berømte konkurrence om cycloiden.

4.3 *Acta Eruditorum* 1691

Det første svar, der indløb til redaktionen af *Acta Eruditorum*, kom fra JOHANN BERNOULLI[20] i december 1690. Derefter indløb løsninger fra HUYGENS og LEIBNIZ, som tryktes sammen med en løsning af opgavestilleren JACOB BERNOULLI i *Acta Eruditorum* 1691. Den eneste store matematiker, man i sekundærlitteraturen[21] undrer sig over ikke er at finde blandt deltagerne, er TSCHIRNHAUS[22].

Samtlige løsninger indeholder udelukkende resultater og konstruktioner, men ingen dybdegående argumenter eller beviser. Dette skal ses som normalt for den periode, hvor man delvist hemmeligholdt sine metoder for at have et forspring i konkurrencen.

Selve artiklerne i *Acta Eruditorum* 1691 er ofte uklare, og i den videre behandling vil jeg ofte støtte mig til senere tilføjelser og redigeringer. Dette er nødvendigt for at få lidt indsigt i metoderne, men også for at kunne forstå, hvad der sker.

Den løsning, som HUYGENS indsendte, adskiller sig fra de andre ved, at den ikke bygger på differentialregningen, som HUYGENS på dette tidspunkt ikke anså for nødvendig til løsning af den slags opgaver. Jeg vil i afsnit 5 give en delvis gennemgang af HUYGENS' resultater og metoder.

LEIBNIZ' løsning indeholder en meget simpel konstruktion, som giver den stor værdi. Til gengæld er adgangen til hans metoder meget begrænset. Jeg skal dog omtale løsningen og metoderne i afsnit 6.

JACOB BERNOULLI's løsning følger samme retning som LEIBNIZ', men overgåes dog langt af denne. Derfor er denne ikke behandlet indgående i nærværende opgave. Derimod har vi en fremragende indsigt i metoderne bag hans yngre bror JOHANN BERNOULLI's løsning. Løsningen og metoderne er præsenteret i afsnit 7.

Der opstår allerede med artiklerne i *Acta Eruditorum* 1691 og de forfinede resultater, der derefter udarbejdes, en tradition for kædelinjens historie. Således er GIRARD's bidrag til forvirringen kun yderst sjældent nævnt, ligesom JUNGIUS oftest får det meste af æren for at have afkræftet parabelteorien. Måske er denne

[18] Brev fra HUYGENS til LEIBNIZ 18. november 1690. (Gerhardt 1849, vol. II, p. 56)
[19] BLAISE PASCAL (1623-1662)
[20] JOHANN BERNOULLI (1667-1748)
[21] (Leibniz 1995, p. 186-191)
[22] EHRENFRIED WALTHER V. TSCHIRNHAUS (1651-1708)

historie-tradition sammen med det meget korte, intense og offentlige forløb medvirkende til, at der ikke forekommer de prioritetsstridigheder om denne kurve, som ellers var hyppige i 1600-tallet.

4.4 HERMANN, GREGORY m.fl.

Efter udgivelsen af løsningerne i *Acta Eruditorum* 1691 og de rettelser og tilføjelser, der så dagens lys de nærmest følgende år, var emnet faktisk næsten udtømt. Der blev lavet forskellige abstraktioner til kædelinjer med en ikke-homogent fordelt masse og lignende (se afsnit 10), men beskrivelsen af den generelle kædelinje var fuldstændig. Der skulle gå nogle år, før den fik det funktionsudtryk, vi kender idag, men mere om forståelsen af en matematisk kurve andetsteds.

I slutningen af 1690'erne blev kædelinjen dog behandlet af HERMANN[23] og GREGORY[24] (1697 og 1699[25]) langs samme linier som afsat i løsningerne fra JOHANN BERNOULLI. Man kan bemærke, at JOHANN BERNOULLI faktisk bidrager med rettelser af fejl i HERMANN's behandling[26]. Med EULER[27] indførtes funktionsudtryk som beskrivelse af kurver, som kædelinjen fandt sin identitet i denne sammenhæng som $y = a \cosh \frac{x}{a}$. Igen i 1900-tallet blev den genstand for fornyede kurveundersøgelser, og i dag findes kædelinjen ofte som en sidebemærkning i introducerende lærebøger i geometri og calculus.

5 HUYGENS' løsning

Den hollandske matematiker og videnskabsmand CHRISTIAAN HUYGENS var ved konkurrencens start en ældre herre. Han havde i sin ungdom beskæftiget sig med kædelinjen, og meget symbolsk vendte han tilbage til det uløste problem imod slutningen af sin karriere. Han tilhørte en generation før differentialregningen, og nåede aldrig helt at komme overens med denne. Senere har han dog indrømmet, at visse af ideerne til udvidelserne af hans løsning stammer fra gennemlæsninger af arbejder af BERNOULLI og LEIBNIZ.

5.1 Præsentation af kildematerialet

HUYGENS' samlede værker er udgivet, og heri er specielt afsnittene (Huygens 1646) og (Huygens 1666 & 1689-1691b) interessante. Ud over løsningen, som HUYGENS indsendte til *Acta Eruditorum*, tilsendte han også 9. oktober 1690[28] LEIBNIZ et anagram indeholdende hans centrale resultater[29]. Selve ideen at tilsende et anagram er for vore dages matematikere noget underlig. I dag er en klar og entydig kommunikation vigtig, mens anagrammerne hører til i en tid, hvor man

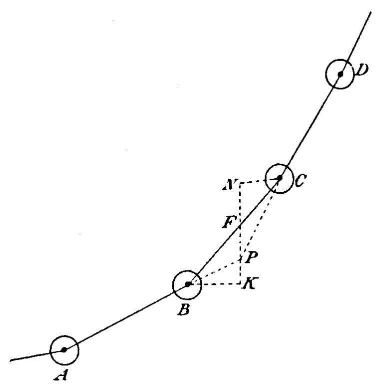
[23] JAKOB HERMAN (1678-1733)
[24] JAMES GREGORY (1638-1675)
[25] (Gregory 1699)
[26] (Loria 1902, vol. II, p. 575)
[27] LEONARD EULER (1707-1783)
[28] Rettelser fremsendes 19. november 1690.
[29] Se (Korteweg 1900, p. 99-100)

beskytter og hemmeligholder sine metoder og således kun fortæller andre, hvad de ved i forvejen. For at tyde HUYGENS' anagram, kræver det nemlig enten indsigt i det, som han kommunikerer, eller adgang til yderligere materiale. Man kan således sammenligne anagrammet med adgangskoden til en hemmelig klub af indviede medlemmer, som da også er et voksende fænomen mod slutningen af 1600-tallet[30]. Jeg skal hverken komme nærmere ind på selve anagrammets indhold, eller HUYGENS' egen forklaring heraf, da begge dele er indeholdt andetsteds.

Min gennemgang af HUYGENS' resultater vil basere sig på artiklen (Korteweg 1900). Man kan finde en kortere gennemgang af H. J. M. Bos i (Gillispie 1970-80, Huygens). Korteweg har samlet uddrag af HUYGENS' arbejder om emnet og lavet en samlet fremstilling af hans argumenter.

5.2 Den elegante geometriske idé

Allerede ved undersøgelserne i 1646 afdækkede HUYGENS en central geometrisk egenskab ved kædelinjen. Han opfattede kædelinjen som sammensat af en uendelig mængde lige store punktvægte med vægtløse, rette 'snore' imellem. Den omtalte egenskab er afbilledet på figur 1[31], hvor A, B, C, D er på hinanden følgende punktmasser. Punktet P er skæringen mellem forlængelserne af AB og CD. Så vil der iflg. et argument fra statisk fysik gælde, at punktet F lodret over P halverer BC. Hans metode benævnes 'infinitesimal geometri' (Gillispie 1970-80, Huygens), og dette er meget betegnende.



Figur 1: HUYGENS' opfattelse af kædelinjen som uendelig mange punktvægte giver statisk egenskab. (Korteweg 1900, p. 101)

Når denne iagttagelse er gjort, bestemmer HUYGENS, at tangens til vinklerne udgør en aritmetisk progression. En oversættelse til dansk af hans argumentation forsøges givet her.

> Hvis kædelinjens vægt er ligeligt fordelt i A, B, C, D og de tre forbindere benævnes nedefra og op med AB, BC, CD, så forlænges de to yderste

[30] Den første frimurerloge blev oprettet 1717.

[31] Figuren på denne opgaves forside er HUYGENS' egen illustration svarende til figur 1 (Huygens 1646, p. 37).

> [AB og CD] og deres mødepunkt kaldes P. Så trækkes gennem P en linie vinkelret på en horisontal. NPK møder de vandrette BK, CN. Så er altså hældningen af AB i forhold til vandret vinklen PBK og hældningsvinklen for BC er FBK [F er skæringen mellem BC og NK, se figur 1] og for CD er den PCN. Og således er tangens af vinklen PBK så meget større end tangens til vinklen FBK som denne er større end tangens til vinklen PCN. (Korteweg 1900, p. 101)

Teksten er her klar og tydelig, når man ser bort fra enkelte indforståede, men åbenlyse, fakta. HUYGENS' konklusion lader sig udtrykke i moderne notation som

$$\begin{aligned}
\tan \angle PBK - \tan \angle FBK &= \frac{PK}{KB} - \frac{FK}{KB} = \frac{PK - FK}{KB} \\
\tan \angle FBK - \tan \angle PCN &= \frac{FK}{KB} - \frac{PN}{NC} \underset{NC=KB}{=} \frac{FK - PN}{KB} \\
&\underset{NK=PN+PK}{=} \frac{FK - (NK - PK)}{KB} \\
&= \frac{PK - (NK - FK)}{KB} = \frac{PK - NF}{KB} \\
&\underset{NF=FK}{=} \frac{PK - FK}{KB}
\end{aligned}$$

Således bliver det klart, at når først den fysiske observation er på plads, er resten blot manipulation af trekanter.

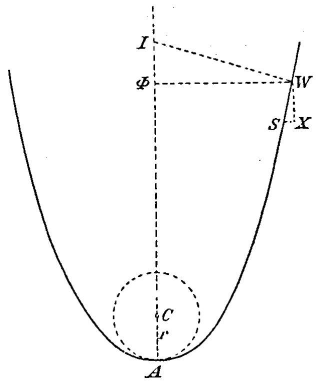
5.3 Kædelinjens rektifikation

Efter at have præsenteret den geometriske fortolkning med punktmasser og vægtløse forbindere, går HUYGENS i gang med at udlede de geometriske egenskaber, som man på det tidspunkt henregenede til en kurves beskrivelse. Hans resultater er formulerede som rent geometriske udsagn, men i modsætning til f.eks. LEIBNIZ (se afsnit 6), er også hans arbejdsmetoder næsten udelukkende geometriske.

Han bestemmer buelængden af kædelinjen samt krumningsradius[32] ved argumenter, der er de eneste i hans behandling, jeg ikke helt kan følge. Det resultat, han når frem til, er forklaret ved hjælp af figur 2. W er det punkt på kædelinjen, som skal undersøges, og WS er tangenten i dette punkt. Så er WI skæringen mellem normalen i W og aksen lodret gennem A, mens Φ er W's projektion på denne akse. Hvis c betegner længden af kædelinjen AW og r betegner krumningsradius i A, finder HUYGENS, at der vil gælde (se figur 2)

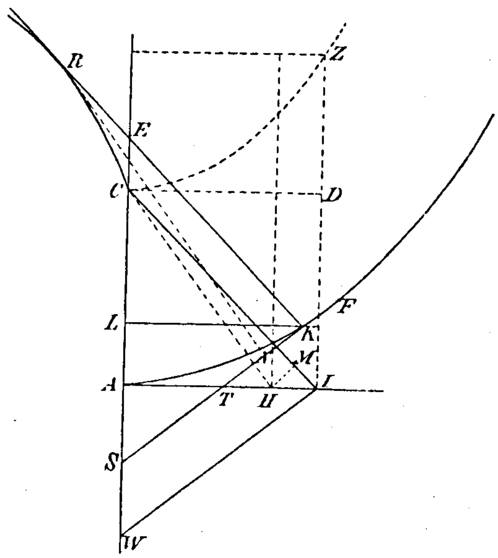
$$\frac{c \cdot \Phi I}{W\Phi} = r$$

[32]Krumningscirkelen til en kurve i punktet M er grænsestillingen for den cirkel, som rører kurven i M og går gennem kurvepunktet N, idet N konvergerer mod M. En kurves krumningsradius i et punkt er så radius krumningscirkelen.



Figur 2: HUYGENS' rektifikation af kædelinjen (Korteweg 1900, p. 103)

I det følgende afsnit giver HUYGENS en anden rektifikation af kædelinjen[33]. En oversættelse af dette til dansk er forsøgt. Den tilhørende figur er 3.



Figur 3: HUYGENS' undersøgelser af kædelinjens rektifikation, evolut m.m. (Korteweg 1900, p. 104)

> Anbring i et eller andet punkt K på kurven linien KE så den selv er en ret vinkel [med tangenten i K] og møder aksen i E. Og fra C, krumningscenteret for kurven i A, føres linien CI parallel med KE, og rammer tangenten i A i I. Jeg siger, at så er den rette linie AI lig med kurven AK. Thi den vinkelrette KL er til LE som kurven KA til AC som tidligere omtalt. I samme grad som KL er til LE er IA til AC; og kurven AK vil være til AC som IA til AC, derfor er kurven AK lig med linjestykket IA. (Korteweg 1900, p. 103-104)

[33]Selvom jeg ikke er i stand til at følge hvert skridt i det forgangne afsnit, er jeg nødt til at antage rigtigheden deraf af hensyn til de kommende argumenter.

Dette afsnit følges af en udregning i det tilfælde, hvor tangenten i K danner vinklen 45° med vandret. Fra det foregående noterer han sig, at han har[34]

$$r = AC = \frac{\widehat{AK} \cdot EL}{LK}$$

og derfor er

$$\frac{KL}{LE} = \frac{\frac{\widehat{AK} \cdot EL}{r}}{LE} = \frac{\widehat{AK}}{r} = \frac{\widehat{AK}}{AC}$$

Da $EK \| CI$ og $\angle KLE = \angle IAC = 90°$ er trekanterne IAC og KLE ensvinklede. Derfor er

$$\frac{KL}{LE} = \frac{IA}{AC}$$

og således

$$\frac{IA}{AC} = \frac{KL}{LE} = \frac{\widehat{AK}}{AC}$$

og altså som nævnt $IA = \widehat{AK}$.

5.4 Et geometrisk argument med grænseovergang

Efter dette bestemmer HUYGENS rektifikationen af kurvens evolut[35]. Resultatet er ikke specielt relevant, men jeg har medtaget afsnittet, da HUYGENS her benytter metoder, der dækker over en grænseovergang, eller med andre ord 'infinitesimal geometri'. En oversættelse er forsøgt, og man skal forestille sig, at konstruktionen fortsætter fra det foregående.

> Fra C føres CH, som møder CI i en lille vinkel i C. Anbring NR parallel med HC, så den møder kurven AK i en ret vinkel [med tangenten]. På samme måde er KR parallel med IC og møder kurven i en ret vinkel. Nu er $AN = AH$ og derfor $AK = HI$ oven i dette. Herfra fås $NK = HI$.
>
> IW er vinkelret på CI, på samme måde HM. Når som KN er til MN således er IH til MH, og således er KR til MC eller KR til IC som WI til IA (thi som IH er til MH, således er WI til IA) eller WC til CI. Og således er WC lig med KR, og denne er $=$ $AC+$kurven CR, og fællesdelen CA, så kurven $CR = AW$. (Korteweg 1900, p. 104)

Den konstruktion, der indleder dette citat, er næsten selvforklarende. Fra de foregående resultater ved man, at $\widehat{AN} = AH$ og $\widehat{AK} = AI = AH + HI$. Fra en række overvejelser over ensvinklede trekanter finder man

$$\frac{\widehat{KN}}{MH} = \frac{HI}{MH}$$
$$\frac{KR}{MC} = \frac{NK}{NM} = \frac{\widehat{NK}}{MH} = \frac{HI}{MH}$$

[34] Jeg bruger at sætte en hat over AK og lignende for at markere, at der er tale om en buelængde. Dette er min notation.

[35] En kurves evolut er det geometriske sted for kurvens krumningscirkler.

Den første er en trivialitet, når man har $\widehat{NK} = HI$, mens den anden er mere spændende. Her bruger man nemlig, at N ligger på tangenten i K, hvilket er grunden til, at vinklen mellem CI og CH skal være lille. Tilsvarende fås

$$\frac{WI}{IA} = \frac{HI}{MH} = \frac{WC}{CI}$$

og igen bruger man, at N ligger tæt ved K til at slutte

$$\frac{KR}{IC} = \frac{HI}{MH}$$

Nu følger det, at $KR = WC$, men det er et kendt resultat (Jessen 1945, vol. II, p. 57) (også dengang) at forskellen i krumningsradius i to punkter er længden af evolutten, altså $KR = AC + \widehat{CR}$, som giver $\widehat{CR} = AW$.

Man bemærker, at HUYGENS til bestemmelsen af buelængden af kurvens evolut gør brug af en meget lille vinkel. Der er ikke antydningen af differentialregning i hans manuskript, men vi kan se, at det snærper i den retning. Men som resten af sin samtid er HUYGENS ikke eksplicit omkring sine grænseovergange. Det er muligt, at differentialregningen er opfundet, men dens fundament, grænseværdibegrebet, er endnu et par hundrede år undervejs.

Man kan bemærke, at dette jo faktisk ikke er første gang, vi ser HUYGENS bruge en grænseovergang i denne sammenhæng. Hans opfattelse af kædelinjen som uendelig mange diskrete punktvægte forbundet af vægtløse tråde skal også efterfølges af en grænseovergang. Det er således ikke nogen atomar opsplitning, men blot en model til at regne med. Hvad HUYGENS i begge tilfælde laver er netop infinitesimal geometri, hvor han med sin indsigt og erfaring opnår at vise en global egenskab ud fra antagelserne om uendelig mange diskrete punkter.

5.5 Resten af HUYGENS' undersøgelse

Efter disse udledninger lykkes det HUYGENS at bestemme arealet af figuren $ACRKA$ (se figur 3) samt at bestemme overfladen af omdrejningslegemet, som fremkommer ved at dreje kurven $\widehat{AK}$ omkring aksen. Begge disse resultater bygger videre dels på det foregående, og dels på mere generelle resultater, som var kendt. De er endvidere begge angivet i anagrammet.

Efter dette giver HUYGENS i to afsnit konstruktioner af kurverne $xxyy = aaxx - aayy$ og $xxyy = a^4 - aayy$, som kan bruges til at bestemme centrale forhold for kædelinjen. Han bruger kræfterne på at beskrive konstruktioner af disse kurver i stedet for at argumentere for, at de faktisk siger noget relevant om kædelinjen. Men ved hjælp af noterne og lidt flid kan man finde ud af, at kvadraturet af den første kurve faktisk sætter en i stand til at bestemme forholdet $\frac{AL}{\widehat{AK}}$, mens kvadraturet af den anden tillader bestemmelsen af forholdet $\frac{LK}{\widehat{AK}}$.

HUYGENS' behandling af kædelinjen afsluttes med beregninger af et uddrag af en sinustabel. Man kan bemærke, at han har anset dette for så relevant, at han har inkluderet det i sin indsendte løsning. I dag er det nærmest totalt uinteressant for behandlingen af kædelinjen.

5.6 Opsummering

Den store hollandske matematiker har også i forholdet til kædelinjen efterladt sig et tydeligt spor. Men denne gang er det ikke for sine resultater, han bør berømmes mest. I dette århundrede, og i særdeleshed i de sidste årtier, er differentialregningen blevet et universalmiddel til kurveundersøgelser. Man lærer efterhånden næsten ikke andet. Men HUYGENS repræsenterer en tradition fra før differentialregningens opfindelse, og i forhold til kædelinjen demonstrer han, at man kan nå mange resultater også uden brug af den (dengang) svære og utilgængelige differentialregning. Alt, hvad det kræver, er blot lidt (meget) matematisk (geometrisk) snilde.

Man har lov til at undre sig over, at han faktisk ikke noget sted kommer op med en punktvis konstruktion af kædelinjen. Således er alle hans undersøgelser netop undersøgelser, altså beskrivelser af geometriske egenskaber ved kædelinjen.

6 LEIBNIZ' løsning

LEIBNIZ fremstår på kontinentet som differentialregningens fader. Han havde samtidig med, men uafhængigt af, NEWTON[36] givet de præmisser, der i dag karakteriserer differentialregningen, men desuden har han givet store bidrag til vores moderne notation. Han havde således en naturlig interesse i at vise, at han faktisk havde opfundet noget nyt, og i denne forståelse skal man se hans bidrag til kædelinjens løsning. Han havde fremskyndet JACOB BERNOULLI til at stille opgaven for at vise alverden, at hans nye matematik var i stand til at løse nye problemer, og han må betragtes som konkurrences sværvægter.

6.1 Præsentation af kildematerialet

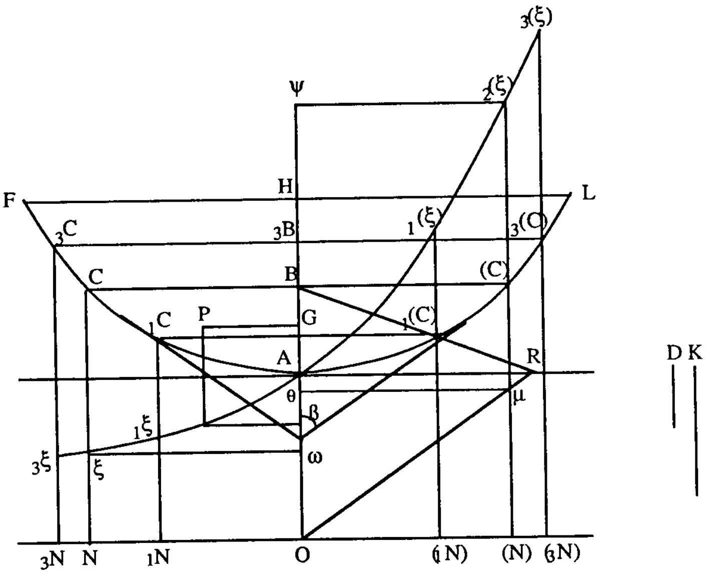
Adgangen til metoderne bag LEIBNIZ' behandling af kædelinjeproblemet er svær og sjælden. Fra hans egen hånd findes artiklen i *Acta Eruditorum* 1691, som kun angiver løsningskonstruktionerne, og en artikel i *Journal des Savants* fra 1692, som næsten er en oversættelse heraf til fransk[37]. MONTUCLA har behandlet kædelinjen i sin matematikhistorie (Montucla 1968, vol. II, p. 468-470), hvori han angiveligt har undersøgt LEIBNIZ' metoder. Foruden de to artikler findes der også rundt om i LEIBNIZ' omfattende brevveksling relevante bemærkninger, men på grund af spredningen og sproglige hensyn har jeg valgt at koncentrere mig om fremstillingen givet i (Leibniz 1995) af artiklen fra *Acta Eruditorum*. Som behandlet i afsnit 7.6 kan man også komme bag om LEIBNIZ' metoder ved at studere BERNOULLI's kommentarer.

[36] ISAAC NEWTON (1642-1727)

[37] (Loria 1902, vol. II, p. 574)

6.2 Kurvens punktvise konstruktion

LEIBNIZ starter sin artikel med at redegøre for kædelinjens historie, og indstifter herved den tradition, der er omtalt i afsnit 4.3. Efter således at have hævdet dels det vigtige i undersøgelser af kædelinjen, og dels sin egen andel i prioriteten herfor, begynder han på en punktvis konstruktion. Konstruktionen ledsages af figuren 4. Hans ideer fremstår ret klart i den følgende oversættelse fra fransk, men man skal bemærke, at hans subscripts lægger sig til det følgende symbol. Endvidere bør man bemærke, at punktet T ikke findes på figuren 4, samt at ϕ hedder ψ på denne. Han tager som udgangspunkt et forhold, som er repræsenteret ved de to segmenter D og K.



Figur 4: LEIBNIZ har een figur, der dækker alle hans undersøgelser. (Leibniz 1995, p. 193)

> Antag, at ON er en ret, ubegrænset parallel til horisonten, OA er et segment vinkelret herpå lig med O_3N, og ovenover $_3N$ er der et vertikalt segment $_3N_3\xi$ som har samme forhold til OA som D til K. Lad os søge mellemproportionalen $_1N_1\xi$ mellem OA og $_3N_3\xi$, derpå mellem $_1N_1\xi$ og $_3N_3\xi$, derpå efter tur mellemproportionalen mellem $_1N_1\xi$ og OA; efterhånden som man således søger mellemproportionalerne, med udgangspunkt i tredieproportionalerne, forlænger vi kurvens spor $\xi\xi\,(A)\,(\xi)\,(\xi)$ ligesom vi tager for $_3N_3\xi$, $_1NO$, $O_1\,(N)$, $(N)_3\,(N)$ etc. lige store intervaller, vil ordinaterne $_3N_3\xi, {}_1N_1\xi, OA, {}_1\,(N)_1\,(\xi), {}_3\,(N)_3\,(\xi)$ være en fortsat geometrisk progression, en kurve som jeg har vænnet mig til at kalde logaritmisk. Følgelig idet vi antager ON og $O\,(N)$ lige store, oprejser vi over N og (N) segmenterne NC og $(N)\,(C)$ lig med den halve sum af $N\xi$ og $(N)\,(\xi)$, og C og (C) bliver kædelinjens punkter $FCA\,(C)\,L$ hvor vi således kan bestemme på geometrisk måde lige så mange punkter, som vi ønsker. (Leibniz 1995, p. 194)

Ovenstående er faktisk ikke meget andet end en punktvis konstruktion af den kurve, vi vel i dag nærmere ville kalde eksponentiel. Derfra er han så i stand til at danne kædelinjen som gennemsnittet af de to modstående værdier. I moderne notation er hans påstand faktisk definitionen af cosh:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Således kan vi ikke i dag drage hans resultat i tvivl, men ovenstående giver unægtelig ikke megen indsigt i de bagved liggende metoder.

LEIBNIZ er selv meget tilfreds med, at ovenstående konstruktion jo tilsyneladende kun bygger på kendskabet til forholdet mellem D og K, og specielt ikke indeholder noget kvadratur. Men, hvad han faktisk har gjort, er jo at gribe tyren ved hornene. Hans måde at undgå hyperbelkvadraturen på er at gå direkte på logaritmerne, som på dette tidspunkt stadig ikke helt havde status som velkendte funktioner.

6.3 Kædelinjens tangenter

Efter således at have angivet en punktvis konstruktion af kurven giver LEIBNIZ sig til at overveje mulighederne i den intime sammenhæng mellem kædelinjen og logaritmerne. Han foreslår således, tilsyneladende i streng alvor, at man kan bruge kædelinjerne som en mobil logaritmetabel. Man skal jo blot foretage nogle registreringer, som han nøje beskriver, for at muliggøre numerisk logaritme- og eksponential-beregning. I dag, hvor vi har meget hurtige og nøjagtige redskaber til disse opgaver, synes dette helt håbløst, men det er vel ikke så tåbeligt i en tid, hvor nye opdagelser hele tiden gjorde svære opgaver tilgængelige.

Efter dette påbegynder LEIBNIZ den undersøgelse af kædelinjens egenskaber, der hører med til et kendskab, som han selv skriver (oversat via fransk):

> Her er *løsningen af de vigtigste problemer*, som sædvanligvis stilles i forbindelse med en kurve. *At afsætte tangenten i et givet punkt C*. På den rette horisontale AR der går gennem toppunktet[38] A, og hvor R er givet ved at OR er lig med OB som er kendt, så vil linien CT, der er antiparallel med OR (og skærer aksen OA i T) være den tangent, som vi søger. Jeg bruger her forkortelsen antiparallel om linierne OR og TC, som med parallellerne AR og BC danner vinklerne ARO og BCT, som ikke er ens, men ikke desto mindre komplementære. De retvinklede trekanter OAR og CBT er således ligedannede. (Leibniz 1995, p. 195-196)

6.4 Kædelinjens rektifikation

Den næste egenskab, man falder til at undersøge er kædelinjens rektifikation, som igen finder en nydelig og flot konstruktion hos LEIBNIZ.

> *At finde segmentet lig med kædelinjens bue*. Hvis man afsætter cirklen i centrum O med radius OB, som skærer den horisontale, som går

[38]Et punkt er et toppunkt for en kurve, hvis kurvens normal i punktet er en symmetriakse.

> gennem A, i R, så vil AR være lig med den givne bue AC. Man ser ligeledes, efter det som er gået forud, at $\phi\omega$ vil være lig med kædelinjens del $CA\,(C)$. Hvis denne er to gange parameteren, dvs. hvis AC eller AR var lig med OA, ville dens hældning i forhold til den horisontale i punktet C, også kaldet vinklen BCT, være 45 grader, og vinklen $CT\,(C)$ følgelig en ret vinkel. (Leibniz 1995, p. 196)

Man observerer, at bestemmelsen af punktet R er den samme som i det foregående afsnit (6.3), hvilket giver den samlede behandling både simplicitet og skønhed.

6.5 Konstruktioner af øvrige geometriske egenskaber

De øvrige geometriske egenskaber, som LEIBNIZ undersøger er: kædelinjens kvadratur, eller bestemmelsen af et areal afgrænset af kædelinjen og et antal rette linier, tyngdepunkter for udsnit af kædelinjen og overflade og volumen af kædelinjens omdrejningslegeme. Vi genkender alle disse fra HUYGENS' behandling, og dette understøtter LEIBNIZ' påstand om, at disse egenskaber, er hvad der hører med til undersøgelsen af en kurve. Sluttelig beviser han ved hjælp af vægtstangsprincippet, at kædelinjen har det lavest mulige tyngdepunkt.

6.6 Opsummering

På grund af den knappe adgang til metoderne bag LEIBNIZ' løsning af kædelinjeproblemet er behandlingen kortere, end tilfældet er for de to andre behandlede løsninger. Men dette siger ikke noget om indholdet af hans løsning, for den er faktisk på mange områder den meste fremragende. Hans punktkonstruktion giver os jo i moderne fortolkning lige præcis den formelsammenhæng, vi idag lader definere cosh, kædelinjens formelle udtryk. Endvidere er også hans gennemgang af kædelinjens geometriske egenskaber meget omfattende, og hans konstruktioner smukke og enkle. Den store mester lader sig således ikke stille i skyggen, når det angår resultaterne. Det ville være fuldendt, hvis han havde taget sig sammen og udgivet en samlet behandling af kædelinjen. Blandt de mest påfaldende indslag i hans udgivne løsning er dog hans forslag om at bruge kædelinjen som mobil logaritmetabel.

7 JOHANN BERNOULLI's løsning

JOHANN BERNOULLI, som er en yngre bror til opgavens stiller JACOB BERNOULLI, var i 1691 en ung og talentfuld schweizisk matematiker. Offentliggørelsen af hans løsning i *Acta Eruditorum* 1691 markerede den første publikation, han lavede alene, og var således hans gennembrud[39]. Der skulle dog gå endnu et par år, før han ikke længere stod i skyggen af sin broder. Således er det ikke tidstypisk for 1690'erne, når jeg undertiden skriver BERNOULLI og mener JOHANN BERNOULLI, men hans bidrag i denne sag berettiger det. JOHANN skulle senere opnå at blive

[39] (Gillispie 1970-80, Johann Bernoulli)

kendt som en af de tidligste mestre af differentialregningen, som den var blevet fremstillet af LEIBNIZ.

7.1 Præsentation af kildematerialet

JOHANN BERNOULLI's løsning i *Acta Eruditorum* er ikke specielt letforståelig. Hvad der sætter ham i et ganske særligt lys i denne sammenhæng, er hans forelæsninger til MARQUIS DE L'HOSPITAL[40], fra hvilke vi har overleveret referater. JOHANN BERNOULLI bruger flere forelæsninger på at forklare sin løsning af kædelinjens problem, og her er der ikke nogen hemmeligholdelse. Han taler nemlig til en betroet, som endda betaler ham (mange) penge for at formidle sin viden. Både dette og L'HOSPITAL's påståede pædagogiske evner medvirker til at give en meget flot fremstilling. Det er fra disse forelæsninger, jeg henter mit materiale.

Jeg vil, ligesom i de foregående afsnit, gøre en del ud af kurvens punktvise konstruktion, men vil i dette afsnit ikke behandle de øvrige geometriske egenskaber så indgående. Dette skyldes, at hovedvægten af differentialgeometrisk indhold ligger i disse punktkonstruktioner, og således er de af størst interesse. Dog er også sammenligningen med LEIBNIZ' konstruktion interessant, og den vil blive gennemgået.

7.2 Udledning af differentialligningen

JOHANN BERNOULLI starter med at definere de fysiske antagelser, som han vil lægge til grund for sin bestemmelse af kædelinjen. Det er simple antagelser fra klassisk statik, som vel næppe kan betvivles, og netop sådan var de da også ment. De findes i den 36. forelæsning (Kowalewski 1914, p. 152-154) og er:

1. Kædelinjen er fuldstændig fleksibel

2. De kræfter, der holder kædelinjen ABC på plads, er de samme som behøves for at holde en masse, der er lige så stor som kædelinjens, på plads i punktet D, som er skæringen mellem tangenterne i A og C, idet kræfterne virker gennem vægtløse strenge langs tangenterne AD og CD. (Figur 5).

3. Hvis kæden er frit ophængt i punkterne A og C og fastgjort i F, vil den ikke ændre form, hvis stykket AF fjernes. (Figur 6).

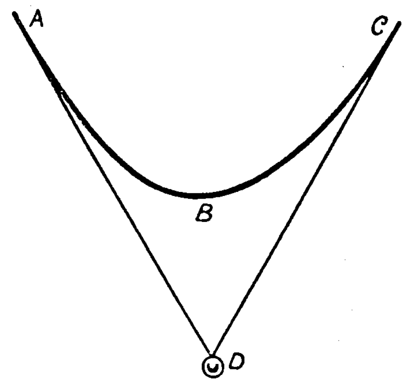
4. Hypotesen 3 giver, at hvis B er det lavest beliggende punkt på kæden ABC, vil kraften i B være den samme, uanset hvor fæstningspunktet A befinder sig.

5. En masse P, som befinder sig i B, holdes på plads af kræfter langs tangenterne AB og CB, som betegnes henholdsvis F_{AB} og F_{CB}. Punktet G er lodret

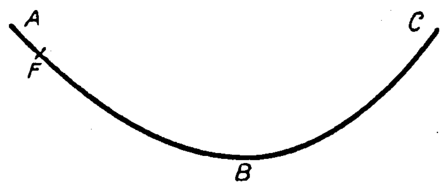
[40] MARQUIS GIULLAUME-FRANÇOIS-ANTOINE DE L'HOSPITAL (1661-1704)

over B. Så gælder (se figur 7).

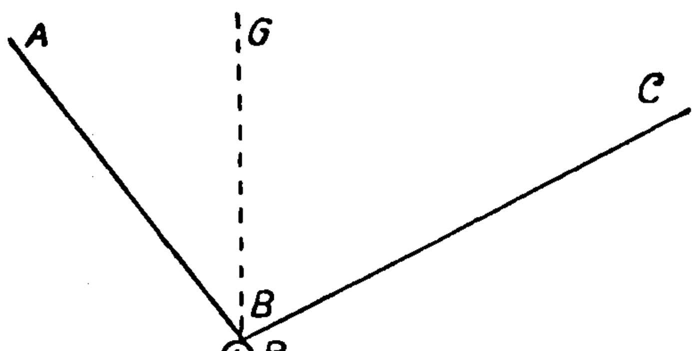
$$\frac{F_{AB}}{F_{CB}} = \frac{\sin\angle CBG}{\sin\angle ABG}$$
$$\frac{P}{F_{CB}} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ABG}$$
$$\frac{P}{F_{AB}} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle CBG}$$



Figur 5: JOHANN BERNOULLI's hypotese 2. (Kowalewski 1914, 153)

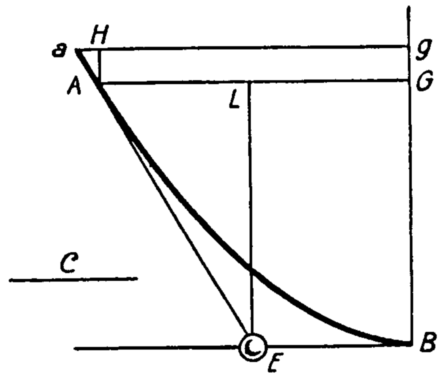


Figur 6: JOHANN BERNOULLI's hypotese 3. (Kowalewski 1914, 153)



Figur 7: JOHANN BERNOULLI's hypotese 5. (Kowalewski 1914, 153)

På grundlag af disse antagelser opstiller JOHANN BERNOULLI en differentialligning for kædelinjen. Ud over de nævnte antagelser får han i løbet af udledningen af differentialligningen brug for at antage, at kæden er homogen, men dette er jo i virkeligheden en af spillereglerne (se afsnit 10). Dette skal bruges til at antage, at man efter valg af enheder kan opnå, at massen er lig med buelængden. Han indstifter en række punkter, som gengivet på figur 8.



Figur 8: JOHANN BERNOULLI udleder en differentialligning for kædelinjen. (Kowalewski 1914, p. 155)

Desuden benævner han $dx = gG$ og $dy = Ha$. Den konstante kraft i B, som er resultatet af hypotese 4 benævner han a og han lader den repræsentere ved linjestykket C. Han forestiller sig så, at massen af kædestykket AB er placeret i punktet E, hvor tangenterne fra punkterne A og B mødes. Ifølge hypotese 2 kræves nu den samme kraft i B for at holde massen E på plads, som tidligere var nødvendig for kædestykket AB. Nu benytter han hypotese 5 til at opstille

$$\frac{s}{a} = \frac{\text{masse } E}{\text{kraft } B} = \frac{\sin \angle AEB}{\sin \angle AEL} = \frac{\sin \angle EAL}{\sin \angle AEL} = \frac{\frac{EL}{AE}}{\frac{AL}{AE}} = \frac{EL}{AL}$$

Her bruger vi, at massen i punktet E er massen af kædelinjen, og at denne kan udtrykkes ved buelængden s. Desuden udnyttes, at kraften i B er benævnt a, og at denne er konstant iflg. hypotese 4.

Nu forlænges linjen EA til EAa, idet det antages, at a ligger på tangenten til kurven i A. Dette siger BERNOULLI ikke noget om. Afstanden mellem a og A skal gøres uendelig lille, hvorved vi opnår at kunne udtrykke den ved differentialer. Trekanterne AaH og EAL er altså ensvinklede, og vi kan skrive

$$\frac{s}{a} = \frac{EL}{AL} = \frac{AH}{Ha} = \frac{dx}{dy}$$

som altså giver BERNOULLI's differentialligning

$$dy = \frac{a\,dx}{s} \tag{1}$$

7.3 Omformning af differentialligning

JOHANN BERNOULLI forsøger ikke at løse differentialligningen (1) direkte, da den indeholder funktionen s, der afhænger af x og y. I stedet forsøger han at omforme den til en differentialligning, som han kan løse. Han giver to forskellige måder at omforme den på, og jeg vil følge den fra lektion 12, som han selv benævner som den letteste. Jeg vil forsøge med en oversættelse.

> Det samme finder man på en anden og lettere måde på følgende vis. Fordi $s = a\,dx : dy$ får man
>
> $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a\,d^2x}{dy}$$
>
> og dermed også
>
> $$dy = \frac{a\,d^2x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$
>
> For at kunne integrere begge sider multiplicerer man på begge sider med dx. Så får man
>
> $$dx\,dy = \frac{a\,dx\,d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$
>
> Når man integrerer, får man
>
> $$x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$
>
> og når man forenkler ligningen
>
> $$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \tag{2}$$
>
> hvilket er det samme som før. (Kowalewski 1914, p. 51)

Dette lille uddrag indeholder flere ting af interesse. For det første viser det os den måde, som de første differentialmestre behandlede disse nye uendeligt små størrelser på. Desuden kan det vise os nogle træk ved selve den tidlige differentialregning i forholdet til den etablerede geometri.

Man ser, at den første ligning i uddraget fremkommer ved at differentiere henholdsvis formlen for buelængden af en kurve og kædelinjens definerende differentialligning med hensyn til y. Efter en omformning multiplicerer BERNOULLI med dx, hvilket han mener sætter ham i stand til at integrere. Denne integration er med hensyn til x, og han udelader helt integrationskonstanten. Dette må han kompensere for senere. En moderne behandling ville ikke bygge på differentialer, som BERNOULLI har gjort, men ville derimod arbejde med differentialkvotienter. Dette er lektien af mange års fejl hos matematikere med mindre kapacitet end BERNOULLI. Men typisk er det for de store mestre, at selvom deres fundament måske ikke er helt i orden, er det sjældent, at de overtræder reglerne.

JOHANN BERNOULLI har kendt formlen for buelængden af en kurve, og vidst at hvis han kendte sammenhængen mellem kurvens koordinater, kunne han bestemme denne buelængde. Dette markerer en skarp modsætning til den almindelige holdning blandt matematikere som DESCARTES, idet dennes udelukkelse af visse trancendente kurver byggede på den klassiske opfattelse, at man aldrig vil kunne bestemme buelængder eksakt[41]. Endvidere kan man bemærke, at BERNOULLI har kendt integralet $\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u}$, som indgår i den mest basale samling af integraler.

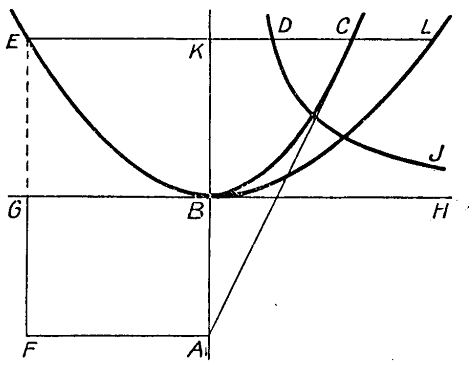
Man kan observere ved at sammenholde (1) og (2), at hvis $x = 0$ bliver $s = \sqrt{x^2 - a^2} = a$, så kurvens toppunkt er ikke sammenfaldende med nulpunktet. Dette kompenserer Bernoulli for ved en substitution $x \mapsto x + a$, som giver differentialligningen

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 + 2ax}} \tag{3}$$

Det er denne differentialligning, han derefter faktisk løser.

7.4 Løsning (konstruktion) ved hyperbelsegment

Ligesom JOHANN BERNOULLI angav to forskellige omformninger af differentialligningen, angiver han også to forskellige løsninger af den. Men i modsætning til omformningerne vil jeg gennemgå begge løsningerne. De to løsningskonstruktioner bygger henholdsvis på hyperbelens kvadratur og parabelens rektifikation. Man vidste i slutningen af 1600-tallet, at disse to problemer var ækvivalente, som jeg har givet et moderne argument for i afsnit 9.1. Begge konstruktionsmetoderne er illustreret på figuren 9.



Figur 9: JOHANN BERNOULLI's punkt-konstruktion ved hyperbelens kvadratur og parabelens rektifikation. (Kowalewski 1914, p. 52)

Han angiver i virkeligheden først to næsten sammenfaldende løsninger ved brug af hyperbelens kvadratur. En oversættelse af den første (via tysk) lyder:

> Man multiplicerer ligningen med a. Så bliver
>
> $$a\,dy = \frac{a^2\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$
>
> Så trækker man de vinkelrette AK, GH som skærer hinanden i B [se figur 9], og man vælger $BA = a$ og tegner med toppunkt B og centrum A den ligesidede hyperbel BC. Endvidere tegner man den kurve DJ,

[41](Bos 1981)

> som er således beskaffen, at BA overalt er mellemproportional mellem KC og KD, dvs. at
>
> $$KD = \frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}} \tag{4}$$
>
> Så trækker man den parallelle (vandrette) AF og danner rektanglet AG [$AFGB$] med samme areal som fladen $HBKDJ$. Hvis man nu forlænger DK og FG vil deres skæringspunkt E ligge på den søgte kurve. (Kowalewski 1914, p. 52-53)

Efter først at have multipliceret begge sider i (3) med a, tegnes en ligesidedet hyperbel BC. Så gælder, at hvis C er et punkt på BC og K er projektionen på AB, er

$$AK^2 - KC^2 = a^2$$

hvilket ved $AQ = a + BQ$ er det samme som

$$a^2 = (a + BK)^2 - KC^2 = a^2 + BK^2 + 2aBK - KC^2$$

altså

$$BK^2 + 2aBK - KC^2 = 0$$

Dermed finder vi, at

$$KC = \sqrt{BK^2 + 2aBK} \tag{5}$$

Nu defineres en ny kurve DJ, ved at BA skal være mellemproportional mellem KC og KD. Vi har altså

$$\frac{KC}{BA} = \frac{BA}{KD}$$

eller

$$KD = \frac{AB^2}{KC} = \frac{a^2}{KC} = \frac{a^2}{\sqrt{BK^2 + 2aBK}}$$

Hvis man nu kalder $BK = x$ får man netop ligningen (4).

Nu danner JOHANN BERNOULLI så rektanglet $AFGB$ ved at vælge AF sådan, at arealet af $AFGB$ er lig med arealet af figuren $HBKDJ$. Dette skal strækkes i det uendelige, således at H og J mødes. Når dette er gjort, har han jo, at rektanglet $AFGB$ har arealet aAF, og figuren $HBKDJ$ har arealet

$$aAF = \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

eller

$$AF = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

uden hensyntagen til integrationskonstanten, der blot repræsenterer en forskydning. Dette betyder netop, at punktet E, som er skæringen mellem forlængelserne af FG og CK, ligger på kurven.

7.5 Løsning (konstruktion) ved parabel-buelængde

Som nævnt giver JOHANN BERNOULLI flere løsningskonstruktioner, og den næste betragter jeg som den smukkeste. Det er dog ikke klart, om han har haft samme forkærlighed for den. Den er ækvivalent med den allerede givne, men adskiller sig dog ved at bruge flere tricks fra differentialregningen, og således være mindre geometrisk. Dette giver mange muligheder for at forundres, dels over hans ideer og dels over, at det faktisk virker. Jeg vil igen give en oversættelse (via tysk) for derefter at knytte kommentarer hertil. Se igen figur 9.

> På endnu en anden måde kan man ved hjælp af rektifikation af en parabolsk kurve konstruere kurven. Da $dy = a\,dx : \sqrt{2ax + x^2}$ bliver
>
> $$dy + \frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}} \qquad \text{(Diff. af } EK + KC = EC\text{)}$$
> $$= \frac{2a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{dx\sqrt{2a+x}}{\sqrt{x}}$$
>
> Man skal altså derfor søge en bestemt kurve BL hvis differential er $dx\sqrt{2a+x} : \sqrt{x}$. Så vil BL selv være lig med EC. Denne kurve finder man på følgende vis. Fra
>
> $$\frac{2a\,dx^2 + x\,dx^2}{x}$$
>
> fjerner man dx^2. Tilbage bliver $2a\,dx : x$. Derfor er
>
> $$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} = \text{Diff. af } KL$$
>
> og
>
> $$\text{Int. } \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} \quad \text{dvs. } \sqrt{8ax}$$
>
> bliver altså lig med KL selv. Kurven BL bliver altså en parabel med parameteren $8AB$. Hvis man strækker denne BL til en ret linie og anbringer den som ordinat i punktet C, så bliver det andet endepunkt E et punkt på den søgte kurve AE. (Kowalewski 1914, p. 53)

JOHANN BERNOULLI bygger i denne løsning videre på den ligesidede hyperbel BC (5) fra afsnit 7.4 som er givet ved

$$KC = \sqrt{x^2 + 2ax}$$

Han siger så, at da $EK + KC = EC$ må differentialerne opfylde samme egenskab. Differentialet af EK kender han allerede som dy, og han beregner differentialet af KC til at være $\frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$ hvilket man let verificerer. Da han også ved, at $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$ fra (3) kan han sige

$$\text{Diff. af } EC = \frac{2a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$$

som han omformer simpelt ved

$$\frac{2a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{(2a + x)\ dx}{\sqrt{x}\sqrt{2a + x}} = \frac{dx\sqrt{2a + x}}{\sqrt{x}}$$

Han søger så en kurve BL hvis differential netop er $\frac{dx\sqrt{2a+x}}{\sqrt{x}}$. Når han kvadrerer dette, opnår han

$$\frac{dx^2\ (2a + x)}{x} = \frac{2a\,dx^2}{x} + dx^2$$

og han anviser os at kaste dx^2 bort uden yderligere bemærkninger. Et moderne forsøg på at 'redde' ham vil bygge på, at den uendelig lille størrelse dx^2 ikke er signifikant når $\frac{2a\,dx^2}{x}$ er endelig, hvilket jo så må antages. Han konstaterer nu, at

$$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} = \text{Diff. af } KL$$

hvilket mest af alt er en definition af KL. Dette viser ham ved en integration, igen uden integrationskonstant, at

$$KL = \int \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{8ax}$$

Man kan let verificere integrationen.

Nu konkluderer han, at kurven BL er en parabel med parameteren $8AB$, hvilket er åbenlyst fra $BK = x$ og $KL = \sqrt{8ax}$. Han hævder nu, at buelængden af denne parabel er EC. Dette kan vi også verificere. Et argument i BERNOULLI's ånd ville måske være[42]

$$\begin{aligned}
\text{Diff. af } BL &= \sqrt{(\text{Diff af } KL)^2 + (\text{Diff af } BK)^2} \\
&= \sqrt{\frac{2a\,dx^2}{x} + dx^2} = \sqrt{\frac{2a\,dx^2 + x\,dx^2}{x}} \\
&= \frac{dx\sqrt{2a + x}}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

hvilket giver ham

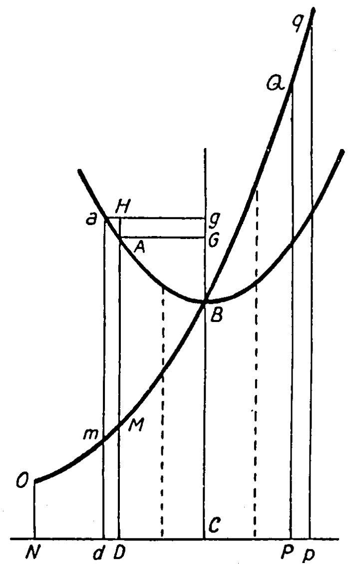
$$\text{Diff. af } BL = \frac{dx\sqrt{2a + x}}{\sqrt{x}} = \text{Diff. af } EC$$

En integration giver så det ønskede $\widehat{BL} = EC$, så hvis BL strækkes til en ret linie af længde $\widehat{BL}$ og placeres vandret i C, udpeger den anden ende punktet E.

[42]Den første linie er normalt udtrykt $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

7.6 Sammenfald med LEIBNIZ' konstruktion

For at overbevise om korrektheden af sine resultater giver JOHANN BERNOULLI et argument, der viser, at den konstruktion, som LEIBNIZ foreslår i *Acta Eruditorum* giver anledning til den samme differentialligning, som han netop selv har løst. Ud over den tilsigtede effekt kan det også bidrage til vores forståelse for LEIBNIZ' metoder, da han åbenlyst har brugt differentialregningen til sin løsning, og JOHANN BERNOULLI er så dygtig ud i differentialregningens anvendelser. Det følgende argument knytter sig til figur 10.



Figur 10: JOHANN BERNOULLI's argument for, at hans konstruktion stemmer overens med LEIBNIZ'. (Kowalewski 1914, p. 156)

For at gøre rigtigheden af vores løsning mere klar, vil vi bevise, at den stemmer overens med Hr. LEIBNIZ' løsning. Hans konstruktion af kædelinjen er som følger.

Lad NCP være en ubegrænset horisontal ret linie og tegn over denne den logaritmiske kurve $OMBQ$, hvor subtangenten altså overalt er det samme eller konstant. Man søger ordinaten CB herfra, som er lig med subtangenten, og tager til begge sider to vilkårlige lige store liniestykker CD og CP. Så laver man DA lig med den halve sum af ordinaterne DM og PQ. Så påstår han, at punktet A ligger på en kædelinje.

For at undersøge om denne kurve er den samme som den af os angivne, må man fastslå om naturen af kurven BA kan udtrykkes i den samme differentialligning. Lad derfor CB eller subtangenten $= a$, $BG = x$, $GA = CD = y$, $DM = z$, $Gg = dx$, $Dd = Ha = dy$. Så bliver på grund af naturen af den logaritmiske kurve $z\,dy = a\,dz$, dvs.

$$dz = \frac{z\,dy}{a}$$

> Efter konstruktionen er $CD = CP$ og så bliver $DM : CB = CB : PQ$, altså $PQ = a^2 : z$ og $\frac{1}{2}DM + \frac{1}{2}PQ$, dvs. efter konstruktionen af DA
>
> $$= \frac{a^2 + z^2}{2z} = CB + BG = a + x$$
>
> altså
>
> $$z^2 = 2az + 2xz - a^2$$
>
> Denne ligning giver, hvis man løser den
>
> $$z = a + x + \sqrt{2ax + x^2}$$
>
> altså
>
> $$dz = dx + \frac{(a + x)\ dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$
>
> Indsætter man værdien af z i den tidligere ligning $dz = \frac{z\,dy}{a}$ så fremkommer
>
> $$dx + \frac{(a + x)\ dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a\,dy + x\,dy + dy\sqrt{2ax + x^2}}{a}$$
>
> eller
>
> $$\frac{a\,dx\sqrt{2ax + x^2} + a^2\,dx + ax\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = a\,dy + x\,dy + dy\sqrt{2ax + x^2}$$
>
> Hvis man dividerer på begge sider med $a + x + \sqrt{2ax + x^2}$ så opnår man
>
> $$\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = dy$$
>
> Da denne ligning er den samme som den, vi har fundet, følger at også kurven BA er vores kædelinje, og at den Leibnizske konstruktion, så forskellig fra også vores ovenfor angivne den måtte synes, ingen anden kurve angiver. (Kowalewski 1914, p. 156-157)

Den konstruktion af LEIBNIZ, som der henvises til, er netop konstruktionen beskrevet i afsnit 6.2. BERNOULLI trækker på den logaritmiske kurves definerende differentialligning, som vi vel i vore dage ville skrive

$$\frac{d}{dx}f(x) = af(x)$$

Han benytter så LEIBNIZ' brug af mellemproportionaler og definitionen af CB til at konkludere $\frac{DM}{CB} = \frac{CB}{PQ}$ eller $PQ = \frac{a^2}{z}$ og derfor

$$DA = \frac{DM + PQ}{2} = \frac{a^2 + z^2}{2z} = CB + BG = a + x$$

thi $DA = CB + BG$. Nu får han så ligningen

$$z^2 = 2az + 2xz - a^2 \Rightarrow z = a + x + \sqrt{2ax + x^2}$$

Nu tager han differentialer og opnår

$$\frac{z\,dy}{a} = dz = dx + \frac{(a+x)\ dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$$

som han omformer til differentialligningen

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = dy$$

som tydeligt er den samme, som den han selv opnåede (3) ud fra geometriske og fysiske antagelser.

Man observerer, at for at vise at to kurver er identiske er det for JOHANN BERNOULLI nok at vise, at de tilfredsstiller samme differentialligning. Hvis man ikke har kendskab til kurvens differentialligning, må denne udledes på grundlag af en punktkonstruktion.

Hvor stort sammenfald af metoder, der er i dette, er selvsagt svært at afgøre på det for mig foreliggende materiale. Dog synes det mig ikke utænkeligt, at vi her faktisk er tæt på LEIBNIZ' egen tankegang, da korrespondancen med BERNOULLI er omfattende.

7.7 Vigtigste geometriske egenskaber

Efter således omhyggeligt at have argumenteret for punktkonstruktioner af kædelinjen og sammenfaldet med LEIBNIZ' konstruktion, går BERNOULLI i slutningen af den 37. forelæsning i gang med at udlede de centrale geometriske egenskaber ved kædelinjen, som de andre også har gjort. Det lykkes ham således at bestemme kurvens tangent og rektifikation, beskrive kædelinjens evolut samt argumentere for, at blandt alle kurver, som er ophængt mellem to punkter, har kædelinjen det laveste tyngdepunkt. Denne påstand findes også hos LEIBNIZ.

Hans metode til udledningen af disse resultater er ganske fremragende. Han giver klare geometriske eller analytiske argumenter, men mangler til gengæld at præsentere klart, hvilke resultater, han er ved at vise.

7.8 Opsummering

JOHANN BERNOULLI's behandling af kædelinjeproblemet er, som præsenteret her, klart den lettest tilgængelige. Jeg kan se flere begrundelser herfor: Dels har vi her adgang til en pædagogisk fremstilling af metoderne, som endda er skrevet på et sprog, jeg mestrer. Og dels bygger han på en tidlig udgave af den differentialgeometri, der senere skulle komme til at dominere kurveundersøgelserne.

Det er karakteristisk for BERNOULLI, som for de fleste af differentialregningens pionerer, at selvom fundamentet er løst, træder de varsomt, og de falder sjældent igennem. Vi finder forskelle fra en moderne behandling i hans 'manglende' integrationskonstanter og evige manipulationer på differential-niveau, men ingen af delene sætter ham så meget af sporet, at det kan mærkes.

8 Sammenligning af løsningerne

Der er ingen tvivl om, at JOHANN BERNOULLI's løsning af kædelinjeproblemet beror på løsningen af en differentialligning. Når man læser sekundærlitteraturen, får man også indtryk af, at LEIBNIZ' løsning bygger på en differentialligning[43]. Men sikkert er det, at den løsning, som HUYGENS angiver, ikke følger dette mønster. Hans indsigt i kurvens statiske egenskaber har sat ham i stand til at give en løsning, som ikke benytter differentialregningen. Da opgaven blev stillet af JACOB BERNOULLI, var det muligvis hensigten at lave en parade for differentialregningen. I givet fald slog det noget fejl, da HUYGENS' løsning indløb. Men det sætter os i stand til at følge en spændende matematisk kappestrid med implikationer for eftertidens matematikforståelse (se afsnit 11). Men HUYGENS' metode bærer prag af at være *ad hoc*. Dette sætter den i en svagere position end differentialregningen, der i løbet af de følgende årtier skulle levere en meget generel metode til undersøgelse af kurver.

Kurvekendskab i 1600-tallets slutning bestod, som det fremgår af det foregående, lidt forenklet af to ting: dels en punktkonstruktion og dels en beskrivelse af kurvens geometriske egenskaber som buelængde, tangent, evolut o.l. Både JOHANN BERNOULLI og LEIBNIZ har i det behandlede materiale en punktkonstruktion af kædelinjen, mens en sådan mangler hos HUYGENS. Måske er grunden, at den ikke er tilgængelig for ham, måske har han forkastet den, da den ville bygge på trancendenter, eller måske findes den faktisk et sted.

9 Moderne kommentarer

Afsnittet 9.1 viser i moderne notation, hvad der skal forstås ved ækvivalensen af hyperbelens kvadratur og parabelens rektifikation. Afsnit 9.2 forsøger, stadig i moderne notation, at udlede nogle af de egenskaber fra kædelinjens ligning, som er relevante, og som man søgte i 1600-tallet. Dette skal især tjene til at vise, at med det moderne apparat er disse egenskaber direkte konsekvenser af funktionsudtrykket.

9.1 Ækvivalens af hyperbelens kvadratur og parabelens rektifikation

Lad os betragte de to funktioner $f(x) = x^2$ og $g(x) = \frac{1}{x}$. Man vidste i 1690, at hyperbelens kvadratur hang uløseligt sammen med parabelens rektifikation. For læserens bekvemmelighed giver jeg et kort moderne argument for denne sammenhæng.

Parabelens buelængde beregnes til at være

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{f'(x)+1}\,dx &= \int_0^x \sqrt{(2x)^2+1}\,dx \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{(4x^2+1)} + \frac{1}{4}\,arcsinh\,2x\end{aligned}$$

[43](Leibniz 1995, p. 186-191)

Søger vi i stedet hyperbelens kvadratur finder vi, at

$$\begin{aligned}\int_a^x g(x)\ dx &= \int_a^x \frac{1}{x}\, dx \\ &= \ln x - \ln a\end{aligned}$$

Nu mangler vi blot at konstatere, at

$$arcsinh\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

for at indse, at hvis man kan løse hyperbelens kvadratur, kan man også løse parabelens rektifikation og vica versa.

9.2 Moderne udledning af kædelinjens centrale egenskaber

9.2.1 Udledning af formelen $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

For en moderne behandling af kædelinjen kan man på grundlag af det foregående vælge to lettilgængelige indfaldsvinkler. Enten kan man overtage BERNOULLI's differentialligning, eller man kan overtage LEIBNIZ' konstruktion.

Hvis man begynder med BERNOULLI's differentialligning, finder man, at fra

$$s = \frac{a\, dx}{dy}$$

følger let, at

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}}$$

$$\begin{aligned}y(s) - y(0) &= \int_0^s \frac{dy}{ds}\, ds = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}} \\ &= a\left(\ln\left(s+\sqrt{a^2+s^2}\right) - \ln a\right)\end{aligned}$$

Hvis vi antager, at $y(0) = 0$ finder vi

$$y(s) = a\left(\ln\left(s+\sqrt{a^2+s^2}\right) - \ln a\right)$$

Ved eksponering bliver dette til[44]

$$e^y = \frac{\left(s+\sqrt{a^2+s^2}\right)^a}{a^a}$$

Og ved at bytte om på siderne og kvadrere, finder vi

$$\left(a\sqrt[a]{e^y} - s\right)^2 = a^2 + s^2$$

[44]Bemærk, at vi fra nu skriver y for $y(s)$.

som vi udregner
$$a^2 + s^2 = a^2 e^{\frac{2y}{a}} + s^2 - 2sae^{\frac{y}{a}}$$
Hvis vi løser med hensyn til s finder vi
$$\begin{aligned} s &= \frac{a^2 e^{\frac{2y}{a}} - a^2}{2ae^{\frac{y}{a}}} = a\frac{\left(e^{\frac{y}{a}}\right)^2 - e^{\frac{y}{a}}e^{-\frac{y}{a}}}{2e^{\frac{y}{a}}} \\ &= a\frac{e^{\frac{y}{a}} - e^{-\frac{y}{a}}}{2} = a\sinh\left(\frac{y}{a}\right) \end{aligned}$$
Dette giver os
$$\frac{dx}{dy} = \frac{s}{a} = \sinh\left(\frac{y}{a}\right)$$
som vi løser til
$$\begin{aligned} x(y) - x(0) &= \int_0^y \frac{dx}{dy}dy = \int_0^y \sinh\left(\frac{y}{a}\right)dy \\ &= a\cosh\left(\frac{y}{a}\right) - a \end{aligned}$$
Dette er ligningen for en normal kædelinje, hvis toppunkt befinder sig i $(0, 0)$.

Det ville uden tvivl være lettere at antage LEIBNIZ' løsning, som faktisk direkte giver os, at
$$x(y) = a\frac{\exp\left(\frac{y}{a}\right) + \exp\left(-\frac{y}{a}\right)}{2} = a\cosh\left(\frac{y}{a}\right)$$
som er kædelinjen med toppunkt i $(0, a)$. I vore dage ynder vi at lægge toppunktet her, da x-aksen så bliver ledelinje.

9.2.2 Naturlig ligning

Vi lader $f(x) = a\cosh\frac{x}{a}$ betegne den normale kædelinje.

Hvis vi lader $\phi = \phi(x)$ betegne vinklen mellem tangenten i $(x, f(x))$ og vandret, kan vi udlede
$$\tan\phi = \frac{d}{dx}f(x) = \sinh\frac{x}{a}$$
og buelængden bliver
$$\begin{aligned} s(x) &= \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}dx = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{a}}dx \\ &= \int_0^x \cosh\frac{x}{a}dx = a\sinh\frac{x}{a} = a\tan\phi \end{aligned}$$
Endvidere finder man[45], at
$$\begin{aligned} f(x) &= a\cosh\frac{x}{a} = a\sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}} = a\sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{a}} \\ &= a\sqrt{1 + \tan^2\phi} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2\phi}} = \frac{a}{\cos\phi} \end{aligned}$$

[45] Vi benytter ofte udregningen $1 + \tan^2\phi = \frac{\cos^2\phi + \sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{1}{\cos^2\phi}$.

9.2.3 Krumningsradius

Vi finder ved formelen $\rho(\phi) = \frac{ds}{d\phi}$ (Jessen 1945, vol. II, p. 54) at

$$\rho(\phi) = \frac{d}{d\phi}(a\tan\phi) = a\left(1 + \tan^2\phi\right) = \frac{a}{\cos^2\phi} = \frac{y}{\cos\phi}$$

Specielt ser man, at krumningsradius i toppunktet er parameteren a.

10 Generaliserede kædelinjer

Allerede i JOHANN BERNOULLI's forelæsninger finder man eksempler på forsøg på at generalisere den almindelige, homogene kædelinje. Man undersøgte også en anden i naturen forekommende kurve, nemlig sejllinien, som forekommer, når vinden spiler et sejl ud. Brødrene BERNOULLI fastslog allerede tidligt, at kædelinjen er sammenfaldende med sejllinien[46], som således blev et synonym hermed. Senere generaliseringer piller især ved antagelsen om den homogene kædelinje. Vi så i BERNOULLI's udledning af differentialligningen (afsnit 7.2) tydeligt, at homogeniteten blev benyttet til at etablere en sammenhæng (ligefrem) mellem buelængden og massen. Denne tradition for undersøgelser af kædelinjens beslægtede kurver holdes ved lige helt op i begyndelsen af dette århundrede, hvor den har fået afgørende praktisk betydning, da kædelinjer jo er en vigtig del af de fleste brobyggerier. Bøger fra omkring 1900, der behandler kædelinjen, bruger ofte mange sider på det, og kun få af siderne omhandler 'vores' homogene kædelinje. Gode, tyske, eksempler herpå er (Loria 1902, vol. II, p. 574-582) og (Schell 1879–1880, p. 94+).

11 Kurvebehandling dengang og nu

Som bemærket tidligere var HUYGENS' løsning en elegang ad hoc analyse af statiske egenskaber ved kædelinjen. Men den lod sig ikke umiddelbart generalisere til andre af de problemer, der interesserede samtiden. Og folk med HUYGENS' nærmest geniale indsigt i kurvernes statiske natur var måske også ved at være en mangelvare. Samtidig blev der udviklet et generelt værktøj, byggende på differentialregningen, til kurveundersøgelse. I dag, 300 år senere, er vi så i en situation, hvor så at sige al kurveundersøgelse er differentialgeometrisk. Man må altså, historisk, udråbe BERNOULLI og LEIBNIZ til vindere på langt sigt. Dette er sikkert også en af grundene til, at BERNOULLI's løsning falder os forholdsvis let forståelig, også i de overordnede træk, mens man blot kan beundre HUYGENS for hans klarsyn og forsøge at følge alle hans slutninger. Man bemærker også, at BERNOULLI's fremgangsmåde, med fra fysiske observationer eller antagelser, at opstille en differentialligning, som han så bruger matematik til at løse, er blevet gængs praksis i dag. Også dette medvirker til at gøre hans løsning attraktiv og forståelig.

[46](Loria 1902, vol. II, p. 578)

Men påvirkningen mellem kædelinjen og differentialregningens fremdrift er ikke ensidig. Allerede i sin løsningsartikel i *Acta Eruditorum* 1691 skriver LEIBNIZ, at kurven har bidraget til udviklingen af differentialregningen[47], og han havde vel også forventet, at hans metode ville vise sig lige så overlegen i denne konkurrence som ellers. I hvert fald søgte både brødrene BERNOULLI og LEIBNIZ at vise metodens overlegenhed. Det er svært at vurdere, hvilken effekt konkurrencens løsninger har haft på samtidens matematikere, da så mange af de store hjerner deltog deri. Men båret på differentialregningens succes, blev kædelinjeproblemet til en paradedisciplin.

Den vægtigste forskel på vore dages differentialregning, og det, som bliver praktiseret i løsningerne fra 1691, er brugen af funktionsudtryk. Brugen af funktionsudtryk stammer netop fra den mellemliggende periode, og i dag er det vel et af de mest centrale begreber i matematikken. Et eksempel på kraften af dette værktøj kan ses i, at vi i dag er i stand til at løse BERNOULLI's oprindelige differentialligning (1), mens han måtte lave en omformning. Men den vigtigste sammenhæng mellem funktionsudtryk og kædelinjen er dog opfattelsen af en kurve. I dag beskriver man en matematisk kurve ved dens funktionsudtryk eller ved en sammenhæng mellem koordinaterne. Eventuelt kan dette ledsages af en graf af en udvalgt del af kurven. Men opfattelsen af en kurve i 1600-tallet var mere omfattende. Der hørte simpelt hen mere med til en kurve, og datidens ækvivalent til vores funktionsudtryk, punktkonstruktionen, var ikke engang i hovedsædet. Vi opfatter vel punktkonstruktioner som vigtige, fordi vi er i stand til at omforme dem til funktionsudtryk, og derved konstatere, om 'de gamle' havde regnet rigtigt eller ej. Men for en trænet geometer var datidens beskrivelse mere indholdsrig end vore dages forskrifter. De gav ham både indsigt om kurvens globale opførsel og indsigt i lokale forhold, som specielt er interessant for at kunne tegne kurven. Selvom kurven er trancendent, er de angivne punktkonstruktioner gode nok, og kurven accepteres og værdsættes i 1690'erne.

Men også en anden forskel springer i øjnene, når man forsøger at følge BERNOULLI's argumenter. Det er hans farlige jongleren med differentialer, men som nævnt tidligere, er han sikker i sin sag og overtræder da heller ikke grænserne. Men i dag, hvor også mindre sjæle end BERNOULLI skal bruge differentialregningen, er vi lykkelige over at have en rigid basis herfor bygget på differentialkvotienter.

12 Konklusion

Kædelinjen hører til blandt de matematiske objekter, der er opstået i en brydningstid. At den stadig har en plads i matematikken skyldes vel to forhold: Dels er den blevet praktisk i forbildelse med brobyggeri og lignende, og dels har den en spændende og lærerig tilblivelseshistorie. Dér kan vi lære meget både om den tidligere differentialregnings metoder, om foranderligheden i matematisk opfattelse og om en matematik uden funktionsudtryk. Man kan sige, at konkurrencen var tænkt som et 'matematisk argument' for differentialregnings slagkraft, og den havde vel også den ønskede effekt. I hvert fald sidder man her 300 år senere og har svært ved at forstå, at nogen kunne lave kurveundersøgelser uden

[47](Leibniz 1995, p. 192)

brug af differentialregningen. Men det kunne man, og de er både indsigtsfulde og charmerende - ganske som differentialregningen.

Litteratur

Bernoulli, J. (1690, May). Analysis Problematis Antehac Propositi. *Acta Eruditorum*, 217–219.

Bernoulli, J. (1691, June). Solutio Problematis Funicularii. *Acta Eruditorum*, 274–276.

Bos, H. J. M. (1975). The Catenary. In H. J. M. Bos (Ed.), *The Calculus in the Eighteenth Century: Techniques and Applications*, Chapter C5.18. The Open University Press.

Bos, H. J. M. (1980). Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition. In I. G. Guinness (Ed.), *From the Calculus to Set Theory 1630-1910*, pp. 49–93. London: Duckworth.

Bos, H. J. M. (1981). On the Representation of Curves in Descartes' Geometrie. *Archive for History of Exact Sciences 24*(4), 295–338.

Bos, H. J. M. (1984). Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations", 1637-ca. 1750. *Archive for History of Exact Sciences 30*, 331–342.

Descartes, R. (1637). *La Géometrie*. Leiden.

Galilei, G. (1933). *Le Opere di Galileo Galilei*. Firenze.

Gerhardt, C. I. (Ed.) (1849). *Leibnizens mathematischen Schriften*. Berlin: Verlag von A. Ascher & Comp.

Gillispie, C. C. (Ed.) (1970-80). *Dictionary of Scientific Biography*, Volume I-XVI. New York: Charles Scribner's Sons.

Gregory, D. (1699). Responsio ad Animadversionem ad Davidis Gregorii Catenarian, Act. Eruditorum Lipsiæ Mense Februari An. 1699. *Philosophical Transactions of the London Royal Society* (259).

Huygens, C. (1646). *De Catena pendente*, Volume XI, Chapter VI, pp. 37–44.

Huygens, C. (1666 & 1689-1691b). *Spartostatique*, Volume XIX, Chapter VII, pp. 51–68.

Huygens, C. (1691a, June). Solutio ejusdem Problematis. *Acta Eruditorum*, 281–282.

Huygens, C. (1905-1950). *Oeuvres completes de Christiaan Huygens*. La Haye: Martinus Nijhoff.

Jessen, B. (1945). Lærebog i Geometri. København: Jul. Gjellerups Forlag.

Korteweg, D. J. (1900). La solution de Christiaan Huygens du probleme de la chaînette. *Bibliotheca Mathematica* (III-1), 97–108.

Kowalewski, G. (1914). *Die erste Integralrechnung: Eine Auswahl aus Johann Bernoullis Mathematishen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes*. Leipzig and Berlin.

Leibniz, G. W. (1995). *La naissance du calcul différential*. Paris: Vrin.

Lockwood, E. H. (1978). *A book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press.

Loria, G. (1902). *Spezielle algebraische und transscendente Ebene Kurven: Theorie und Geschichte*. Leipzig: Druch und Verlag von B. G. Teubner.

Mejlbo, L. C. (Ed.) (1979, September). *Nogle kapitler af matematikkens historie*, Volume I-II of *Elementærafdelingen*. Matematisk Institut, Aarhus Universitet.

Molland, A. G. (1976). Shifting the foundations: Descartes' transformation of ancient geometry. *Historia Mathematica 3*, 21–49.

Montucla, J. F. (1968). *Historie des Mathématiques*. Paris: Albert Blanchard.

Schell, W. (1879–1880). *Theorie der Bewegung und Kräfte* (2nd ed.). Leipzig: B. G. Teubner.

Sørensen, H. K. (1992). Johann Bernoullis løsning af Kædelinjeproblemet. 3. årsopgave, Århus Statsgymnasium, Aarhus.

Whiteside, D. T. (1960-62). Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century. *Archive for History of Exact Sciences 1*, 179–388.