Matematikhistorie i gymnasiets undervisning

AARHUS UNIVERSITET

Henrik Kragh Sørensen

Steno Instituttet, Aarhus Universitet
mail@henrikkragh.dk, www.henrikkragh.dk

Matematiklærerdag, Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet.

Et fugleperspektiv fra en grusgrav

- ⋆ Hvorfor overhovedet matematikhistorie?
  - – Fugleperspektiv og forbehold
    - ◇ Subjektivt — anderledes,
    - ◇ Praktisk erfaring,
    - ◇ Egnet litteratur,
    - ◇ Ydmyghed og store ambitioner.
  - – Matematikhistorie i hvilke sammenhænge?
  - – Hvilken (slags) matematikhistorie?
- ⋆ Case 1: Historisk tilgang til begrebsdannelse.
- ⋆ Case 2: Matematikhistorie som kulturhistorie.
- ⋆ Case 3: Begreber og beviser.

Matematikhistorie i gymnasiet — hvorfor?

- ⋆ "Menneskeliggøre" matematikken.
- ⋆ Åbne op for selvstændig fordybelse.
- ⋆ Åbne op for behandling af matematikkens natur.
- ⋆ Bidrage perspektiv på matematikken → almen-dannelse.
- ⋆ Åbne for tvær- og trans-faglighed → muliggøre samarbejde med andre fag og fagligheder:
  - Historie,
  - Dansk (og engelsk og tysk og . . .),
  - Oldtidskundskab og filosofi,
  - . . .

Matematikhistorie i gymnasiet — hvorfor?

⋆ “Menneskeliggøre” matematikken.

⋆ Åbne op for selvstændig fordybelse.

⋆ Åbne op for behandling af matematikkens natur.

⋆ Bidrage perspektiv på matematikken → almen-dannelse.

⋆ Åbne for tvær- og trans-faglighed → muliggøre samarbejde med andre fag og fagligheder:

– Historie,
– Dansk (og engelsk og tysk og . . .),
– Oldtidskundskab og filosofi,
– . . .

⋆ Hvorfor ikke?

Hvilken matematikhistorie

- ⋆ Matematikhistorie kan (når det er bedst) ...
  - ... Bidrage til matematik-forståelsen,
  - ... Bibringe forståelse for matematikkens forhold,
  - ... Muliggøre diskussion af matematikkens natur.
- ⋆ Hvilken slags matematikhistorie?
  - – Begrebshistorie,
  - – Kontekstualisering og “generel” historie,
  - – Filosofisk orienteret historie.

Historisk tilgang til begrebsdannelse

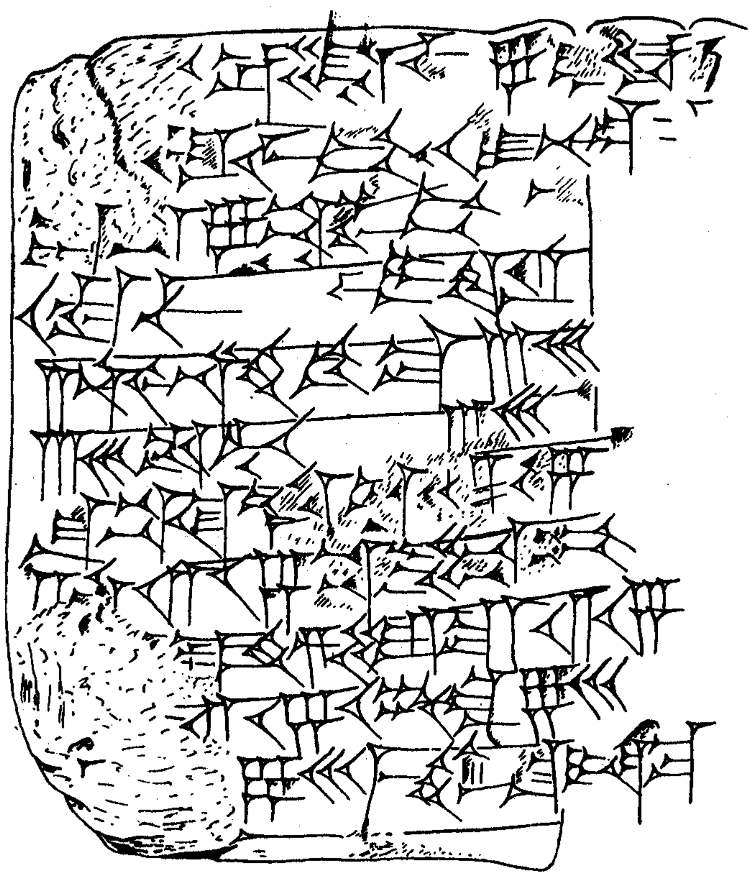
⋆ Formål: At hjælpe eleverne til begrebsdannelse og begrebsforståelse ved at inddrage historie og derved også vise, hvordan moderne undervisningsmatematik *har* været ganske svært. Derved bliver eleverne også gjort opmærksomme på, at matematik er en menneskelig aktivitet.

⋆ Placering: I matematikundervisningen, typisk i kernestof.

⋆ Eksempler:

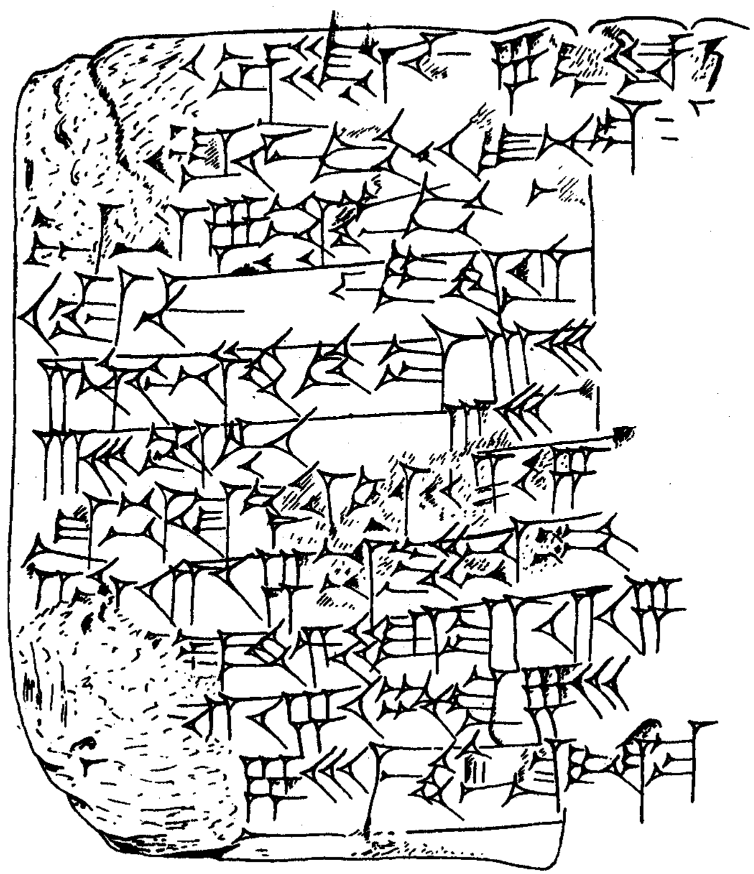
- Den tidlige differentialregning (Newton og Leibniz),
- Integralbegrebet,
- Komplekse tal,
- Ligningsløsning.

Ligningsløsning fra Babel til Abel



"*Igibûm* overstiger *igûm* med 7. Hvad er de?"
(YBC 6967)

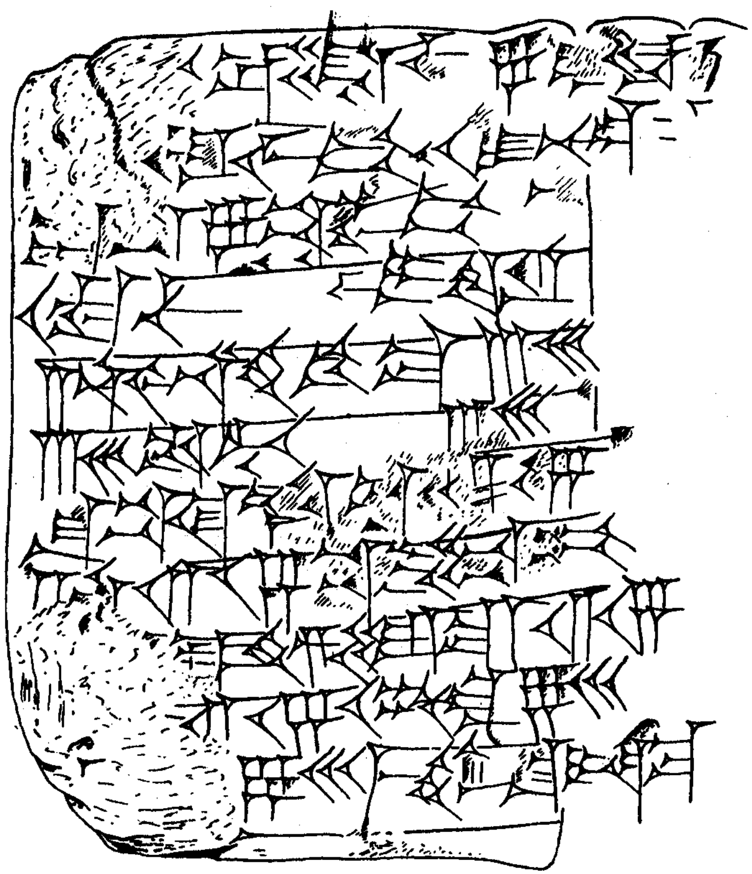
Ligningsløsning fra Babel til Abel



"*Igibûm* overstiger *igûm* med 7. Hvad er de?" (YBC 6967)

"Du brækker de 7, hvormed *igibûm* overstiger *igûm*, i to: $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$ ganget med $3\frac{1}{2}$ er: $12\frac{1}{4}$. Til $12\frac{1}{4}$, som fremkommer for dig, føjer du 60 fladen: $72\frac{1}{4}$. Hvad gør $72\frac{1}{4}$ ligesidet? $8\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$, som du gangede med sig selv, føjer du til den ene og trækker fra den anden. Den ene bliver 12, den anden bliver 5. 12 er *igibûm*, 5 er *igûm*." (YBC 6967)

Ligningsløsning fra Babel til Abel



"*Igibûm* overstiger *igûm* med 7. Hvad er de?" (YBC 6967)

"Du brækker de 7, hvormed *igibûm* overstiger *igûm*, i to: $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$ ganget med $3\frac{1}{2}$ er: $12\frac{1}{4}$. Til $12\frac{1}{4}$, som fremkommer for dig, føjer du 60 fladen: $72\frac{1}{4}$. Hvad gør $72\frac{1}{4}$ ligesidet? $8\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$, som du gangede med sig selv, føjer du til den ene og trækker fra den anden. Den ene bliver 12, den anden bliver 5. 12 er *igibûm*, 5 er *igûm*." (YBC 6967)

$$\sqrt{60 + \left(3\tfrac{1}{2}\right)^2} \pm 3\tfrac{1}{2}.$$

Ligningsløsning fra Babel til Abel

NICCOLÒ TARTAGLIA (1499–1557)

GIROLAMO CARDANO (1501–1576)

Tredjegradsligningens løsning

- $\star$ Betragt ligningen $x^3 + px - q = 0$.
- $\star$ Skriv $x = u - v$ og sæt ind:

$$\begin{aligned} 0 &= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + pu - pv - q \\ &= u^3 - v^3 + 3uv(u - v) + p(u - v) - q. \end{aligned}$$

- $\star$ Dette er i hvert fald opfyldt, *hvis*

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ 3uv = -p. \end{cases}$$

Tredjegradsligningens løsning

⋆ Betragt ligningen $x^3 + px - q = 0$.

⋆ Skriv $x = u - v$ og sæt ind:

$$\begin{aligned} 0 &= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + pu - pv - q \\ &= u^3 - v^3 + 3uv(u - v) + p(u - v) - q. \end{aligned}$$

⋆ Dette er i hvert fald opfyldt, *hvis*

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ 3uv = -p. \end{cases}$$

⋆ 'Babylonsk system'

Tredjegradsligningens løsning

⋆ Betragt ligningen $x^3 + px - q = 0$.

⋆ Skriv $x = u - v$ og sæt ind:

$$\begin{aligned} 0 &= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + pu - pv - q \\ &= u^3 - v^3 + 3uv(u-v) + p(u-v) - q. \end{aligned}$$

⋆ Dette er i hvert fald opfyldt, *hvis*

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ 3uv = -p. \end{cases}$$

⋆ 'Babylonsk system' $\rightarrow$ løsning

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

Tredjegradsligningens løsning

⋆ Betragt ligningen $x^3 + px - q = 0$.

⋆ Skriv $x = u - v$ og sæt ind:

$$\begin{aligned} 0 &= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + pu - pv - q \\ &= u^3 - v^3 + 3uv(u-v) + p(u-v) - q. \end{aligned}$$

⋆ Dette er i hvert fald opfyldt, *hvis*

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ 3uv = -p. \end{cases}$$

⋆ 'Babylonsk system' $\rightarrow$ løsning

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

⋆ Reduceret til at løse en ligning af grad 2 og uddrage en kubikrod.

En håbløs kamp

- ⋆ Hvordan løser man ligninger af grad 5?
- ⋆ Analyser af kendte løsninger til ligninger af grad 1, 2, 3, 4.
- ⋆ Kan man overhovedet løse (alle) ligninger af grad 5?
- ⋆ NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) i 1826: Den generelle 5.-gradsligning kan ikke løses algebraisk.
- ⋆ Men den kan godt løses eksakt med andre redskaber (1850'erne).

NIELS HENRIK ABEL (1802–1829)

Begrebsdannelse: Ligningsløsning

- ⋆ Ligningsløsning sat i perspektiv $\rightarrow$ geometrisk og algebraisk tilgang til ligningsløsning.
- ⋆ Hvad vil det sige at løse noget “eksakt”?
- ⋆ Hvad er “fordelen” ved en analyse?

Begrebsdannelse: Ligningsløsning

- ⋆ Ligningsløsning sat i perspektiv $\rightarrow$ geometrisk og algebraisk tilgang til ligningsløsning.
- ⋆ Hvad vil det sige at løse noget “eksakt”?
- ⋆ Hvad er “fordelen” ved en analyse?

- ⋆ Spil med præcise spilleregler.
- ⋆ Inden for givne spilleregler kan ikke alt lade sig gøre.
- ⋆ Spillereglerne kan debatteres og genforhandles.

Matematikhistorie som kulturhistorie

⋆ Formål: At vise eleverne, at matematik er en del af kulturbegrebet og at matematikhistorie derfor er en del af kulturhistorien. At dokumentere matematikkens (lange) historie og dennes indlejring i kulturelle debatter til forskellige tider.

⋆ Placering: Gerne i samarbejde med humanistiske fag (historie, dansk, . . .); evt. i matematikundervisningen kombineret med en af de andre former for matematikhistorie.

⋆ Eksempler:

– Matematikken i en af de antikke kulturer (Ægypten, Mesopotamien, Grækenland, Kina),

– Dansk matematiks historie → undervisningen i matematik.

Nedslag i dansk matematiks historie

- ⋆ Georg Mohr og konstruktioner alene med en passer (1670).
- ⋆ Matematik og matematikere i Danmark 1800-1920:
  - – Matematikkens professionalisering og autonomi,
  - – Matematikkens internationalitet,
  - – Den politiske matematiker.
- ⋆ Brødrene Bohr og hjælpen til tyske emigranter i mellemkrigstiden.
- ⋆ Udviklingen i matematikundervisningen i “gymnasiet”:
  - – Faktuelle kundskaber (kernestof) $\rightarrow$ stofindhold,
  - – Dannelse (kompetencer).

Studentereksamensopgaver i 200 år

- ⋆ "At uddrage Qvadratroden af 78 indtil eller med trende Decimaler." (Arithmetik og Geometrie, 1810)
- ⋆ "At forklare, hvad den geometriske Proportion er, og at bevise de vigtigste Læresætninger, denne Proposition vedkommende." (Arithmetik og Geometrie, 1812)
- ⋆ "I Ligningen $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ er Forskellen mellem to af Rødderne $4i$, hvor $i = \sqrt{-1}$ og Produktet af de to andre Rødder er 1. Find Rødderne samt a og b." (Studentereksamen, maj-juni 1924, opgavesæt 1, opg. 1)
- ⋆ "En funktion f er bestemt ved $f(x) = \sqrt{3x-2}$, $x \geq \frac{2}{3}$. En ret linje l er givet ved ligningen $3x - 4y + 2 = 0$. Gør rede for, at grafen for f i punktet med førstekoordinaten 2 har linjen l som tangent." (Studentereksamen, mat-fys, 1978, opgavesæt 1, opg. 1)

Matematikhistorie som kulturhistorie

- ⋆ Vise matematikken som menneskelig aktivitet,
- ⋆ Indlejring i samfund og kultur,
- ⋆ Undervisningens formål og indhold,
- ⋆ Kernestoffets udvikling,
- ⋆ Kontekstualisering → matematik-syn og mulig matematik-forskrækkelse.

Begreber og beviser

- ⋆ Formål: At muliggøre kvalificerede diskussioner af matematikkens natur, dens særegne metode og dennes forhold til andre videnskaber. Derved også diskutere den matematiske videns natur, dens muligheder og dens begrænsninger.
- ⋆ Placering: Evt. isoleret i matematikundervisningen, men meget gerne i samarbejde med andre (natur-)videnskaber, filosofi, evt. dansk.
- ⋆ Eksempler:
  - Aksiomer og ikke-euklidisk geometri,
  - Umulige konstruktioner,
  - Eksistensbeviser, fx. Algebraens Fundamentalsætning,
  - Polyedre og Eulers formel.

Polyedre og Eulers formel

Polyedre og Eulers formel

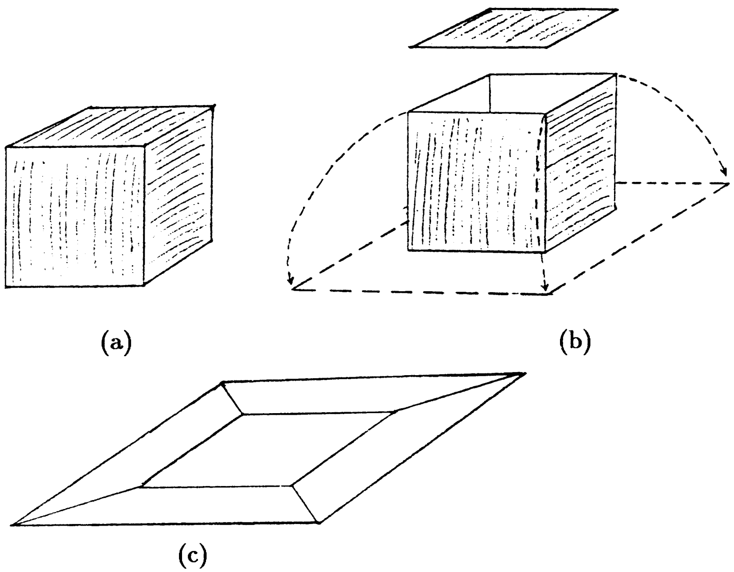
Navn		**V**	**E**	**F**
Tetraeder	4 3-kanter	4	6	4
Kube	6 4-kanter	8	12	6
Oktaeder	8 3-kanter	6	12	8
Dodekaeder	12 5-kanter	20	30	12
Ikosaeder	20 3-kanter	12	30	20

⋆ Eksperimenter og induktive slutninger.

⋆ Intuition som inspiration.

⋆ Polya.

Polyedre og Eulers formel



Et bevis.

⋆ Polyederet pustes op på en kugleflade.

⋆ En flade i polyederet fjernes.

⋆ Polyederet foldes ud i planen.

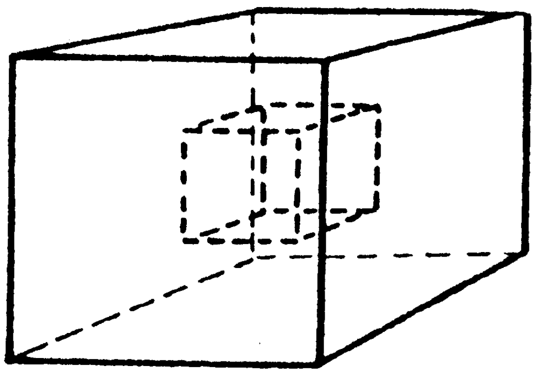
⋆ Den planære figur trianguleres.

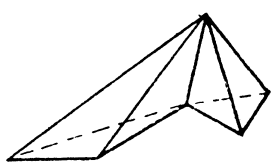
⋆ Ved at fjerne kanter ses, at $V - E + F$ er invariant.

⋆ Til sidst er kun en trekant tilbage: $V - E + F = 1$

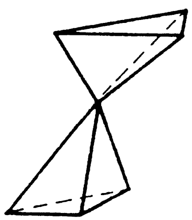
⋆ Sammen med den oprindeligt fjernede flade er Eulers formel bevist: $V - E + F = 2$.

Polyedre og Eulers formel





(a)

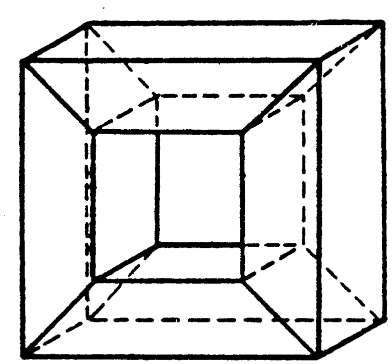


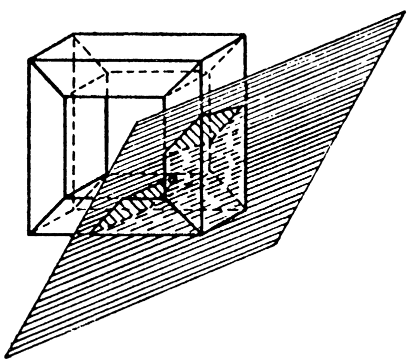
(b)

Monstrene kommer!

- ⋆ Lokale og globale modeksempler.
- ⋆ Monsterudelukkelse.
- ⋆ Bevisanalyse $\rightarrow$ forfinet sætning (formodning).
- ⋆ Beviser og gendrivelser.

Polyedre og Eulers formel





Begreberne præciseres

- ⋆ Centrale begreber præciseres → ændres.
- ⋆ Gamle sætninger må revideres.
- ⋆ Beviser og gendrivelser → dialektik.

Polyedre og Eulers formel

- ⋆ Polyedre som matematiske objekter → med diverse konnotationer.
- ⋆ Eksperiment og induktive gæt (aktivitet).
- ⋆ Et første bevis.
- ⋆ Beviser åbner for gendrivelser → monstre og udelukkelse → præcisering.
- ⋆ Det store spørgsmål: Hvorfor beviser matematikere sætninger?

Opsummering

⋆ Matematikhistorie kan både virke

– Inspirerende og lærende for matematikkens "egen skyld", og

– Perspektiverende i forhold til matematikkens natur og forhold til kultur og andre videnskaber.

⋆ Mulighederne er (næsten) uendelige → meget eksisterer der allerede materiale til → håber at have inspireret til at kaste jer ud i det → og til at arbejde og udvikle videre.

`www.henrikkragh.dk/hom/gymnasieemner/`
`mail@henrikkragh.dk`

Historiske temaer på hjemmesiden

- ⋆ Ligningsløsning i Renæssancen
- ⋆ Differentialregningens tidlige historie
- ⋆ Polyedre, induktion og matematiske beviser
- ⋆ Euklids Elementer og det syntetiske bevis
- ⋆ Aksiomer og ikke-euklidisk geometri
- ⋆ Matematikken lever!
- ⋆ Matematik i Danmark
- ⋆ Fra indbildte størrelser til matematiske borgere
- ⋆ Konstruktion og umulighed
- ⋆ Perspektivlære
- ⋆ Kryptologi
- ⋆ Firefarveproblemet

Matematikhistorisk litteraturliste 'egnet' for gymnasiet.

Dynamisk side $\longrightarrow$ konstruktiv kritik meget ønskelig.

Litteratur

Andersen, K. (red.): 1986, *Kilder og Kommentarer til Ligningernes Historie*, Forlaget Trip, Vejle.

Andersen, K.: 1980, An impression of mathematics in Denmark in the period 1600–1800, *Centaurus* **24**, 316–334.

Bak, M. M.: 2003, *Matematik i Danmark 1500–1700*, Steno Museets Venner, [Århus].

Gericke, H.: 1996, *Talbegrebets historie*, Matematiklærerforeningen og Institut for de Eksakte Videnskabers Historie, Aarhus Universitet, Århus. Oversat af K. Andersen og K. Larsen.

Jankvist, U. T. og Sağlanmak, N.: 2005, Hvad søgte de og hvad fandt de? Kombinatoriske løsningsformler til algebraiske ligninger — fra Cardano til Cauchy, *Normat* **53**(2–3), 54–71, 97–111.

Lützen, J.: 2000, Skolekammerater og kolleger: Matematikerne Julius Petersen og Hieronymus Georg Zeuthen, *i* J. Lützen (red.), *Fakultære højdepunkter. Episoder fra Det naturvidenskabelige Fakultets 150-årige historie*, Det naturvidenskabelige Faktultet, Københavns Universitet, København, pp. 45–63.

Petersen, P. B. og Vagner, S. (red.): 2003, *Studentereksamensopgaver i matematik 1806–1991*, Matematiklærerforeningen, København.

Ramskov, K.: 2000, Lille Bohr: matematikeren Harald Bohr, *i* J. Lützen (red.), *Fakultære højdepunkter. Episoder fra Det naturvidenskabelige Fakultets 150-årige historie*, Det naturvidenskabelige Faktultet, Københavns Universitet, København, pp. 77–84.

Sørensen, H. K.: 2005a, Eksakte videnskaber — mere eller mindre: De matematiske videnskaber, *i* H. Kragh (red.), *Natur, Nytte og Ånd, 1730–1850*, bind 2 af *Dansk Naturvidenskabs Historie*, Aarhus Universitsforlag, Aarhus, kapitel 9, pp. 293–301.

Sørensen, H. K.: 2005b, Matematik i det offentlige satiriske rum for hundrede år siden, *Matilde: Nyhedsbrev for Dansk Matematisk Forening* **25**, 17–23,25,32.

Sørensen, H. K.: 2006a, Matematik og statistik, *i* P. C. Kjærgaard (red.), *Lys over Landet, 1850–1920*, bind 3 af *Dansk Naturvidenskabs Historie*, Aarhus Universitsforlag, Aarhus, kapitel 7. Indsendt 2004/09/07. Udkommer 2006. Forventet omfang: 25 sider.

Sørensen, H. K.: 2006b, Matematik, statistik og datalogi, *i* H. Nielsen og K. H. Nielsen (red.), *Viden uden grænser, 1920–1970*, bind 4 af *Dansk Naturvidenskabs Historie*, Aarhus Universitsforlag, Aarhus, kapitel 6. Indsendt 2004/05/06. Udkommer 2006. Forventet omfang: 20 sider.