

Nye og kendte forslag til matematikhistoriske forløb i gymnasiets (matematik-)undervisning*

Henrik Kragh Sørensen[†]

26. januar 2012

CVS version: 1.9, 2009-12-03 10:18:56

Indhold

1	Ligningsløsning i Renæssancen	1
2	Differentialregningens tidlige historie	2
3	Polyedre, induktion og matematiske beviser	3
4	Euklids Elementer og det syntetiske bevis	4
5	Aksiomer og ikke-euklidisk geometri	5
6	Matematikken lever!	6
7	Matematik i Danmark	7
8	Fra indbildte størrelser til matematisk borgerret	8
9	Konstruktion og umulighed	9
10	Perspektivlære	10
	Samlet litteraturliste	11

*Denne fil blev lavet i forbindelse med et oplæg i marts 2006 og vil løbende blive opdateret og vil være tilgængelig på internettet fra www.henrikkragh.dk/hom/gymnasieemner/.

[†]Institut for Videnskabsstudier, Aarhus Universitet, hks@ivs.au.dk.

1 Ligningsløsning i Renæssancen

På baggrund af Andersen (1986); Gericke (1996) præsenteres og diskuteres løsningen af polynomiumsligninger i Renæssancen. Der kan lægges særlig vægt på, at ligningsløsningen foregår uden et stort algebraisk begrebsapparat, og at beviserne præsenteres geometrisk.

Litteratur

2 Differentialregningens tidlige historie

Ved hjælp af udvalgte kilder, fx fra Andersen et al. (1987) præsenteres differentialregningens tidlige historie. Der kan lægges vægt på de store problemer, man havde med at begrunde produktreglen $d(xy) = x dy + y dx$. Man kan også kontekstualisere dette forløb ved at diskutere l'Hospitals rolle og bidrag, fx på grundlag af generelle matematikhistoriske værker og Andersen (1988).

Litteratur

3 Polyedre, induktion og matematiske beviser

Polyedrenes historie indtager en central position i Lakatos' matematikfilosofi. Flere sider af dette kan man godt behandle i et forløb, der samtidig introducerer og udfolder polyedre som matematiske objekter.

Man kan fx lægge ud med at se på polyedrenes relationer til fx naturvidenskab og kunst, Senechal og Fleck (1988); Grünbaum (1994). Eller man kan følge Euklids bevis for, at der kun er fem konvekse, regulære polyedre (Euklid, 1897–1912, efter XIII.18).

Når selve objekterne således er på banen kan man arbejde sig frem mod Eulers sætning, $V - E + F = 2$ ved at eksperimentere med at tælle hjørner (V), kanter (E) og flader (F) for forskellige polyedre, fx inspireret af Polya (1954); Pólya (1957).

Endelig kan man så læse starten af Lakatos (2003, 1976) og derved blive udsat for "underlige" polyedre, monstre og modeksempler.

Man kan vælge at perspektivere yderligere omkring implicite antagelser i matematiske beviser ved at benytte uddrag af Bundgaard (1957) om faldgruber i beviser for plane polygoners areal.

Dette temas indhold vil på den skitserede måde nå rundt om både at introducere polyedre som objekter, eksperimentere sig frem til en induktion og efterfølgende underkaste formodninger gentagne gendrivelses. Derved kommer man til at illustrere den dialektik, som matematisk opdagelse ofte kan ses at være et resultat af.

Litteratur

4 Euklids Elementer og det syntetiske bevis

På baggrund af uddrag fra (Euklid, 1897–1912, bog I) diskuteres den hypotetisk-deduktive metode og især det syntetiske bevis, som det fremstår hos Euklid. Dernæst kan man perspektivere ved at diskutere den mulige, bagvedliggende opdagelsesproces, fx ved at kontekstualisere differentialregningens tidlige historie (se også case 2).

Litteratur

5 Aksiomer og ikke-euklidisk geometri

I forlængelse af eller til erstatning for case 4 om det syntetiske bevis kan man behandle de matematiske aksiomers natur ud fra en historisk behandling af den ikke-euklidiske geometri.

Man kan fx starte ud med at præsentere og diskutere Euklids aksiomer i (Euklid, 1897–1912, bog I); man må lægge vægt på postulaterne og måske på de første sætninger af parallel-læren og især den første sætning, som bruger det femte postulat (Euklid, 1897–1912, I.29).

Man kan med fordel relatere Euklids postulat til Playfairs aksiom (gennem et punkt P udenfor en ret linje l at trække en ret linje parallel med l); se fx (Euclid, 1956, I, 312–314)

Dernæst må man søge at behandle opdagelsen af den ikke-euklidiske geometri som en relativisering af det femte postulat: det er nu (efter 1826) ikke længere et absolut udsagn om det rum, vi lever i, men et aksiom, som kan antages eller ikke-antages. Specialet Thomsen (2004) beskriver dette formidlet til gymnasiet.

Man kan med fordel fokusere på selve opdagelsen af den ikke-euklidiske geometri i 1820'erne ved Lobachevsky og Bolyai; se Lobatjevskij (1988); Mejlbo (1989); Gray (2004). Derved kan man også kontekstualisere denne matematiske og filosofiske diskussion. Endelig kan man nå til en diskussion af rummets natur og matematikkens muligheder for at nå indsigt deri, se Lützen (2003).

Litteratur

6 Matematikken lever!

Til trods for mange gymnasieelevers (og enkelte universitetsstuderendes!) opfattelse, er matematik et fag, der er i stadig rivende udvikling. Ved at perspektivere med nogle af de nyere opdagelser i den rene matematik kan man give eleverne et billede af, at ikke alt matematik var opdaget i år 1700 (hvilket gymnasiepensum i en vis grad godt kan lede en til at tro); se også Devlin (1988). Derved kommer man også ind på at kunne diskutere den moderne matematiske praksis, herunder måske også brugen af computere i erkendelse og beviser.

Blandt de største matematiske problemer, som er blevet løst inden for den sidste årrække er *Firefarveproblemet* og *Fermats sidste sætning*. Begge dele er komplicerede matematiske beviser, men begyndelsesgrundene kan godt gøres forståelige på gymnasieniveau.

På baggrund af bogen Singh (1997) (og evt. den 'tilhørende' film) præsenteres problemet i *Fermats sidste sætning*. Det understreges, at der er tale om et matematiske, universelt umulighedsudsagn: Der findes *ingen* $n > 2$, sådan at ligningen $x^n + y^n = z^n$ har ikke-trivielle heltalsløsninger. Dernæst diskuteres forsøg på beviser for denne sætning i det omfang, det lader sig gøre i gymnasiet; se fx den historiske behandling i (Edwards, 1977, kap. 1–2). Endelige diskuteres — uden at kunne gå ind på selve beviset — naturen i Andrew Wiles' bevis, herunder Wiles' arbejdsform og det faktum, at beviset ikke er "elementært" i forstanden, at det fremkom ved at kombinere resultater fra forskellige matematiske genrer.

Man kan også belyse den helt moderne matematik ved at diskutere brugen af computere i matematiske beviser. Der findes to prototypiske eksempler på denne diskussion i *Firefarveproblemet* og *Kuglepakningsproblemet*; førstnævnte er beskrevet i Wilson (2002), sidstnævnte i Szpiro (2003) og begge kunne godt udgøre et selvstændigt matematikhistorisk forløb. For begge disse problemer gælder det, at de (ligesom *Fermats sidste sætning*) er nemme at formulere, men utrolig svære at bevise. Derfor kan man godt formidle problemstillingerne i gymnasiet, mens man må beskrive løsningerne uden al den detalje, som ellers kan karakterisere undervisningen. Dette er faktisk en pointe i sig selv, idet det også fremmer elevernes forståelse for (og evne til) at tale *om* matematik på en kvalificeret måde.

Litteratur

7 Matematik i Danmark

Når man skal indplacere matematikhistorien i kulturhistorien kan man med mange fordele vælge at betragte matematikken i en fremmed kultur, fx den babylonske, den ægyptiske eller den græske. Men man kan også udlede meget af at belyse matematikkens forhold i Danmark gennem de sidste århundreder.

Der er ikke så meget at sige om (forsknings-) matematikken i Danmark før 1850, men Georg Mohrs bidrag vil på mange måder passe fint ind i en perspektivering af fx case 9; se Andersen (1980); Bak (2003).

Matematikkens forhold og indhold i Danmark efter 1800 er beskrevet i Sørensen (2005a, 2006a,b), hvor der især lægges vægt på den stigende professionalisering og internationalisering af matematikken. Dette kan med fordel bruges til at diskutere lokale vs. globale (internationale) formål med matematik. For at få endnu mere kød og blod på nogle af de centrale aktører kan henvises til Ramskov (2000); Lützen (2000). Brødrene Bohr vil også kunne inddrages i et forløb om matematikkens forhold i mellemkrigstiden, evt. sammen med uddrag fra Ramskov (1995).

Det egentlige forslag til et forløb om matematikken i Danmark handler imidlertid om undervisningen i matematik i det danske 'gymnasium' igennem 200 år. På grundlag af Petersen og Vagner (2003) udvælges nogle eksempler på eksamensopgaver i faget. Disse sætter eleverne i stand til dels at reflektere over fagets indhold og — sammenholdt med de historiske diskussioner i Petersen og Vagner (2003); Sørensen (2006a) at diskutere matematikkens rolle i uddannelsen. Man kan evt. perspektivere yderligere til matematikopfattelserne i offentligheden ved at inddrage Sørensen (2005b).

Litteratur

8 Fra indbildte størrelser til matematisk borgerret

Med grundlag i en del af den samme historie som i case 1 kan man vælge at fokusere på de komplekse tal og især Algebraens Fundamentalsætning i udviklingen fra Descartes til Gauss. Derved får man et perspektiv på de komplekse tal, samtidig med, at man diskuterer, hvornår matematiske objekter bliver “kendte” eller forståede.

Med udgangspunkt i fx Gericke (1996); Carstensen (1993) omtales først kort de komplekse tals implicite optræden i løsningsformlen for 3. gradsligningen hos Cardano og Bombelli. Der fokuseres på, at disse netop ikke er *tal*, men enten står uforklarede eller bliver fortolket som *operationer*.

Dernæst diskuteres Descartes’ (og evt. også Girards) formulering af Algebraens Fundamentalsætning i 1600-tallet, idet der lægges vægt på den status, de “nye” rødder tillægges som værende “indbildte”.

Derefter springes til introduktionen af en geometrisk repræsentation af komplekse tal i årene omkring 1800, fx byggende på Gericke (1996); Andersen (1999); Wessel (1799); Ebert (1995); det vigtige er her, at vise, at de komplekse tal først sent tillægges den geometriske fortolkning, som for mange sikrer deres anskuelighed.

Afsluttende behandles Gauss’ første bevis for Algebraens Fundamentalsætning Gauss (1890) (dansk bearbejdelse af Lützen?). Ved at følge beviset ser man først og fremmest, at der er tale om et ikke-konstruktivt eksistensbevis. Samtidig fremdrages det også, at for Gauss er de komplekse tal reelle og udpræget manipulerbare — med Gauss’ egne ord (1831) har de komplekse tal “borgerret” i matematikken.

Som et eksempel kan man også inddrage Gauss’ konstruktion af en regulær 17-kant, selvom litteraturen hertil sikkert er svær at læse; se dog Iden (2005). Det vil i givet fald involvere en kort omtale af, at konstruktionsproblemer (passer og lineal) svarer præcist til ligninger, der kan løses med kvadratrødder, se fx Lützen (1985) og case 9.

Litteratur

9 Konstruktion og umulighed

Dette forløb skal muliggøre en diskussion af matematikkens præcise spilleregler og især af, hvordan disse kan føre til, at man kan bevise at noget *ikke* kan lade sig gøre.

Der lægges ud men diskussion af den klassiske geometriske konstruktionsform (passer og lineal); se også Bunt et al. (1976); Flensberg (1983); Mejlbo (1989). Dette kan gøres ved at læse fra (Euklid, 1897–1912, I) og supplere med mere komplicerede konstruktionsopgaver hentet fra fx Petersen (1866); Maxwell (1953). Man må være påpasselig, da mange af disse konstruktionsopgaver vil synes fremmede for moderne elever. Hvis man vælger problemet "At bestemme et punkt, hvorfra tre givne cirkler synes lige store" kan man også finde en perspektivering i Toft (2001).

Dernæst behandles de klassiske konstruktionsproblemer og umuligheden af at løse disse ved passer og lineal på baggrund af behandlingen i Lützen (1985). Der kan evt. suppleres fra Jones et al. (1991), som behandler dette på en mere formel algebraisk måde, som nok ligger ud over, hvad gymnasieelever selvstændigt kan fordøje.

Litteratur

10 Perspektivlære

Perspektivlæren — og især den mere matematiserede dele — kan med fordel inddrages i undervisningen, idet de kan bidrage både en kobling til anvendelse i billedkunst og til matematisk teoridannelse.

Det matematiske perspektiv i billedkunsten er behandlet i flere fremstillinger, fx Andersen (1993); Andersen og Nielsen (1985); Jungersen (1991); Marcussen (1987).

Som et særligt velvalgt eksempel på den matematiske teoridannelse over perspektivet henvises til Lamberts perspektiviske geometri, se (Andersen, 2004, kap. XII)

Litteratur

Samlet litteraturliste

- Andersen, K. (1978). *Træk af den matematiske analyses udvikling i 1600-tallet*. Institut for de eksakte naturvidenskabers historie, Aarhus Universitet.
- Andersen, K. (1980). An impression of mathematics in Denmark in the period 1600–1800. *Centaurus* 24, 316–334.
- Andersen, K. (red.) (1986). *Kilder og Kommentarer til Ligningernes Historie*. Vejle: Forlaget Trip.
- Andersen, K. (1988). *Guillaume-François-Antoine de L'Hospital: Analyse af de uendelig små størrelser til forståelse af kurver*. Foreningen Videnskabshistorisk Museums Venner.
- Andersen, K. (1993). *Geometrien bag Perspektivet*. Skive: Matematiklærerforeningen.
- Andersen, K. (1999). Wessel's work on complex numbers and its place in history. I B. Branner og J. Lützen (red.), *Caspar Wessel. On the Analytic Representation of Direction. An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons*, bind 46:1 af *Matematisk-fysiske Meddelelser, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab*, pp. 65–98. Copenhagen: C. A. Reitzel.
- Andersen, K. (2004, juni). The geometry of an art: The history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge. Preprint. History of Science Department, University of Aarhus. 2 bind.
- Andersen, K., H. Bos og J. Lützen (red.) (1987). *Træk af den matematiske analyses historie. En antologi af kilder og sekundær litteratur*. Institut for de eksakte videnskabers historie, Aarhus Universitet.
- Andersen, K. og K. Nielsen (1985). *Synspyramider og forsvindingspunkter - Træk af historien om geometri og forsvindingspunkter*. Aarhus: Videnskabshistorisk Museums Venner.
- Bak, M. M. (2003). *Matematik i Danmark 1500–1700*. [Århus]: Steno Museets Venner.
- Barnette, D. (1983). *Map Coloring, Polyhedra, and the Four-Color Problem*. Nummer 8 i The Dolciani Mathematical Expositions. The Mathematical Association of America.
- Bundgaard, S. (1957). *Om plane polygoners areal*. Aarhus: Matematisk Institut, Aarhus Universitet.
- Bunt, L. N. H., P. S. Jones og J. D. Bedient (1976). *The historical roots of elementary mathematics*. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall.
- Carstensen, J. (1993). *Komplekse Tal* (3. udg.). Herning: Systeme.
- Devlin, K. (1988). *Mathematics: The New Golden Age*. Harmondsworth: Penguin Books.
- Ebert, J. (1995). *Komplekse tal*. Sønderborg: Forlaget Minor.
- Edwards, H. M. (1977). *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer-Verlag.
- Euclid (1956). *The Thirteen Books of The Elements* (2. udg.). New York: Dover Publications.
- Euklid (1897–1912). *Euklids Elementer*. København: Nordisk Forlag.
- Flensberg, G. M. (1983). *Geometriske konstruktioner*. Herning: Systeme.
- Gauss, C. F. (1890). *Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades. (1799–1849)*. Nummer 14 i Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann.
- Gericke, H. (1996). *Talberegrets historie*. Århus: Matematiklærerforeningen og Institut for de Eksakte Videnskabers Historie, Aarhus Universitet.
- Gray, J. (2004). *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space*. Nummer 1 i Burndy Library Publications, New Series. Cambridge (Mass): Burndy Library.

- Grünbaum, B. (1994). Regular polyhedra. I I. Grattan-Guinness (red.), *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*, bind 2, kapitel 7.3, pp. 866–876. London: Routledge.
- Iden, O. (2005). Konstruktion av den regulære 17-kanten. *Normat* 53(1), 34–38.
- Jankvist, U. T. og N. Saĝlanmak (2005). Hvad søgte de og hvad fandt de? Kombinatoriske løsningsformler til algebraiske ligninger — fra Cardano til Cauchy. *Normat* 53(2–3), 54–71, 97–111.
- Jones, Morris og Pearson (1991). *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*. New York: Springer-Verlag. [HKS: Angiveligt svær].
- Jungersen, C. J. (1991). Perspektivlære. Speciale, Aarhus Universitet, Aarhus.
- Kristensen, E. (1975). *Ikke-Euklidisk Geometri*. København: G.E.C. Gads Forlag.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (2003). Beviser og gendrivelser: Logikken i de matematiske opdagelser. Delvis oversættelse til dansk af *Proofs and Refutations*.
- Lobatjevskij, N. I. (1988). *Geometriske Undersøgelser over Teorien for Parallelle Linier*. Nummer 20 i Elementærafdelingen. Aarhus: Matematisk Institut, Aarhus Universitet. Oversat til dansk af Lars Mejlbo.
- Lützen, J. (1985). *Cirklens kvadratur, vinklens tredeling og terningens fordobling. Fra oldtidens geometri til moderne algebra*. Herning: Systime.
- Lützen, J. (2000). Skolekammerater og kolleger: Matematikerne Julius Petersen og Hieronymus Georg Zeuthen. I J. Lützen (red.), *Fakultære højdepunkter. Episoder fra Det naturvidenskabelige Fakultets 150-årige historie*, pp. 45–63. København: Det naturvidenskabelige Fakultet, Københavns Universitet.
- Lützen, J. (2003, november). Matematikkens og rummets natur. *Aktuel Naturvidenskab* (5), 28–31.
- Marcussen, M. (1987). *Perspektiv - Om rumopfattelse og rumgengivelse*. København: Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck.
- Maxwell, E. A. (1953). *Geometry for advanced pupils*. Oxford: Clarendon Press.
- Mejlbo, L. C. (red.) (1979, september). *Nogle kapitler af matematikkens historie*. Nummer 17 i Elementærafdelingen. Matematisk Institut, Aarhus Universitet.
- Mejlbo, L. C. (1989, januar). *Om den elementære geometris historie*. Nummer 22 i Elementærsamlingen. Aarhus: Matematisk Institut, Aarhus Universitet.
- Petersen, J. (1866). *Methoder og Theorier til Løsning af geometriske Konstruktionsopgaver*. Kbh.
- Petersen, P. B. og S. Vagner (red.) (2003). *Studentereksamensopgaver i matematik 1806–1991*. København: Matematiklærerforeningen.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton (NJ): Princeton University Press.
- Pólya, G. (1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (2. udg.). New York: Garden City Doubleday Anchor Books.
- Ramskov, K. (1995). *Matematikeren Harald Bohr*. Licentiatforhandling, Institut for de eksakte videnskabers historie, Aarhus Universitet.
- Ramskov, K. (2000). Lille Bohr: matematikeren Harald Bohr. I J. Lützen (red.), *Fakultære højdepunkter. Episoder fra Det naturvidenskabelige Fakultets 150-årige historie*, pp. 77–84. København: Det naturvidenskabelige Fakultet, Københavns Universitet.
- Senechal, M. og G. Fleck (red.) (1988). *Shaping Space: A polyhedral approach*. Boston: Birkhäuser.
- Singh, S. (1997). *Fermats Store Sætning*. København: Gyldendal.

- Sondhermer, E. og A. Rogerson (1981). *Numbers and Infinity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Szpiro, G. G. (2003). *Keplers kugler. 400 års søgen efter et matematisk bevis*. København: Ingeniøren/Bøger.
- Sørensen, H. K. (2005a). Eksakte videnskaber — mere eller mindre: De matematiske videnskaber. I H. Kragh (red.), *Natur, Nytte og Ånd, 1730–1850*, bind 2 af *Dansk Naturvidenskabs Historie*, kapitel 9, pp. 293–301. Aarhus: Aarhus Universitetsforlag.
- Sørensen, H. K. (2005b, december). Matematik i det offentlige satiriske rum for hundrede år siden. *Matilde: Nyhedsbrev for Dansk Matematisk Forening* 25, 17–23,25,32.
- Sørensen, H. K. (2006a). Matematik og statistik. I P. C. Kjærgaard (red.), *Lys over Landet, 1850–1920*, bind 3 af *Dansk Naturvidenskabs Historie*, kapitel 7, pp. 193–216. Aarhus: Aarhus Universitetsforlag.
- Sørensen, H. K. (2006b). Matematik, statistik og datalogi. I H. Nielsen og K. H. Nielsen (red.), *Viden uden grænser, 1920–1970*, bind 4 af *Dansk Naturvidenskabs Historie*, kapitel 6, pp. 105–124. Aarhus: Aarhus Universitetsforlag.
- Thomsen, K. og A. Spangsberg (1988). *Differentialregningen i historisk perspektiv*. Aarhus: Aarhus Universitetsforlag.
- Thomsen, M. (2004). Aspekter af den ikke-euklidiske geometris historie. Inspirationsmateriale til matematikinteresserede gymnasieelever. Speciale, Institut for Videnskabshistorie, Aarhus Universitet, Aarhus.
- Toft, B. (2001). Matematik løser problemer. I M. Niss (red.), *Matematikken og Verden*, Fremads debatbøger — Videnskaben til debat, kapitel 7, pp. 158–179. København: Fremad.
- Wessel, C. (1799). Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning. *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* 5, 469–518.
- Wilson, R. (2002). *Four Colours Suffice. How the Map Problem was Solved*. London etc.: Penguin/Allen Lane.