Dansk oversættelse af P.-F. Verhulst (1838). „Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement". *Correspondance mathématique et physique de l'Observatoire de Bruxelles*, bd. 10, s. 113–121.

Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen (2014). *Vækst i nationens tjeneste. Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. København: Matematiklærerforeningen

Man ved, at den berømte *Malthus* har fastslået det princip, at en given befolkning tenderer mod at vokse eksponentielt således, at den fordobles over en bestemt periode f.eks. femogtyve år. Denne lovmæssighed er ubestridelig, hvis man ser bort fra, at når befolkningen har nået en vis tæthed, vil det være en stadigt voksende udfordring at skaffe sig fornødenheder, eller de ressourcer, som er nødvendige for, at befolkningen kan vokse, selv for et helt nyt samfund, som f.eks. en større fordeling af arbejdet, en legitim regering og midler til forsvar, så man kan bevare den offentlige ro, etc.

Altså, *alt andet lige*, hvis tusind sjæle er blevet til to tusinde sjæle på femogtyve år, så vil de to tusinde blive til fire tusinde efter den samme tidsperiode.

I vores gamle europæiske samfund, hvor det gode land er blevet opdyrket gennem lang tid, vil det arbejde, der lægges i at forbedre en allerede opdyrket mark, ikke kunne forhindre, at det øgede afkast til stadighed er aftagende; forudsat at man i de første femogtyve år har fordoblet afkastet af jorden, vil man i den anden periode knap kunne producere en tredjedel oveni. Begrænsningen af udstrækningen og frugtbarheden af landet giver altså den potentielle befolkningsvækst en grænse, og befolkningen vil derfor i højere og højere grad bevæge sig mod at blive konstant.

Det sker ikke i enkelte helt ekstraordinære tilfælde, som for eksempel når et civiliseret folk opdyrker et frugtbart område, der endnu ikke er befolket, eller man driver en produktion, som giver store midlertidige fordele. En stor familie bliver i disse tilfælde en rigdom, og den næste generation har lettere ved at etablere sig, fordi den ikke ligesom den første generation skal overvinde de forhindringer, som et uopdyrket land giver de første nybyggere.

For at vurdere den hastighed, befolkingen vokser med i et givet land, må man dividere befolkningsvæksten for hvert år med den befolkning, som ligger til grund for denne vækst. Dette forhold, som er uafhængigt af befolkningens absolutte størrelse, kan ses som et udtryk for denne hastighed. Hvis forholdet er konstant, vokser befolkningen eksponentielt; hvis det er voksende, vokser befolkningen hurtigere end eksponentielt, og mindre end eksponentielt hvis det er aftagende.

Man kan komme med forskellige hypoteser om, i hvilken grad modstanden, dvs. summen af forhindringer, modvirker befolkningens uhæmmede vækst. M. *Quetelet* antager, modstanden er proportional med *kvadratet på den hastighed, som befolkningen vokser med*.[1]

Det svarer til at sammenligne væksten af befolkningen med bevægelsen af et objekt, der falder gennem et miljø med modstand. Resultaterne af denne sammenligning er på tilfredsstillende vis i overensstemmelse med statistisk data og med de resultater, jeg selv har fået ved at antage, at det miljø, der er tale om, har en uendeligt voksende densitet.

Befolkningsvæksten har nødvendigvis en grænse, om ikke andet så i udstrækningen af land, hvor befolkningen kan bosætte sig. Når en nation har opbrugt alle landets afgrøder, kunne man i virkeligheden skaffe sig fornødenheder udefra i bytte for andre produkter og på den måde understøtte en ny befolkningsvækst. Men det er klart, at denne import vil have begrænsninger og vil stoppe længe før hele landet er dækket af byer. Alle formler, man vil forsøge at bruge til at beskrive befolkningsvæksten, må altså indeholde et *maximum*, som kun bliver nået i en uendelig fjern fremtid. Dette *maximum* vil så være antallet af personer, når befolkningen er blevet konstant.

Jeg har længe forsøgt at analysere mig frem til den mest sandsynlige lov for befolkningsvækst, men jeg har opgivet denne fremgangsmåde, fordi der er for få af de givne størrelser, der kan bestemmes ved observationer, til, at man kan være sikker på, at formlerne er eksakte. Da jeg alligevel er overbevist om, at den fremgangsmåde, jeg har brugt, når man har fået bestemt tilstrækkeligt mange af de givne størrelser, i sidste ende vil føre frem til den rigtige lovmæssighed, og at de resultater, jeg er kommet frem til, vil vække interesse, om ikke andet så som genstand for eftertanke, har jeg set mig nødsaget til at tage imod M. *Quetelets* invitation og offentliggøre dem.

Lad p være en befolkning: lad dp være den uendeligt lille befolkningsvækst, der forekommer i det uendeligt lille tidsrum dt. Hvis befolkningen vokser eksponentielt, får vi ligningen $\frac{dp}{dt} = mp$. Men eftersom hastigheden af befolkningsvæksten falder med størrelsen af befolkningen, er vi nødt til at trække en ukendt funktion af p fra mp, således at formlen bliver

$$\frac{dp}{dt} = mp - \phi(p).$$

Den mest simple funktion ϕ, man kan tænke sig, er at antage $\phi(p) = np^2$. Ved integration finder man

[1] *Essai de physique sociale,* 1. udg., s. 277.

nedenstående ligning

$$t = \frac{1}{m}\left[log.p - log.(m - np)\right] + \text{konstant},$$

og man behøver da kun tre observationer for at bestemme de to koefficienter n og m og den vilkårlige konstant.

Ved at løse ovenstående ligning mht. p fremkommer

$$p = \frac{mp'e^{mt}}{np'e^{mt} + m - np'}, \tag{i}$$

hvor p' betegner befolkningen for $t = 0$, og e betegner grundtallet for den naturlige logaritme. Hvis man sætter $t = \infty$, ser man, at den tilhørende værdi for p er $P = \frac{m}{n}$. Dette er altså *den øvre grænse for befolkningen*.

I stedet for at antage $\phi p = np^2$ kunne man sætte $\phi p = np^{\alpha}$, for et vilkårligt α, eller at $\phi p = n\ log.p$. Alle disse hypoteser passer lige godt på de observerede fakta, men de giver meget forskellige værdier for den øvre grænse for befolkningen.

Jeg har trinvist antaget

$$\phi p = np^2,\ \phi p = np^3,\ \phi p = np^4,\ \phi p = n\ log.p;$$

og forskellen mellem de udregnede befolkningstal og de observerede befolkningstal blev tilnærmelsesvist den samme.

Når befolkningen vokser hurtigere end eksponentielt, bliver udtrykket $-\phi p$ til $+\phi p$; differentialligningen løses altså på samme måde som før, men man får, at der i dette tilfælde ikke kan findes noget *maximum* for befolkningen.

Jeg har udregnet nedenstående tabeller vha. formel (i). Tallene for Frankrig, Belgien og grevskabet Essex er taget fra de officielle dokumenter. De tal, der omhandler Rusland, er fundet i *Dr. Sadler, Law of population*, og jeg kan ikke garantere for deres autencitet, da jeg ikke ved, hvordan man er kommet frem til dem. Jeg kunne have udvidet tabellerne for Frankrig og Belgien til 1837 vha. årsopgørelser, der er blevet udgivet i de to lande siden 1833, og på den måde verificere min formel; men mit arbejde har ikke givet mig tid tilovers til at gøre det. Mit arbejde blev afsluttet i 1833, og jeg har ikke beskæftiget mig med det siden.

Jeg vil kort bemærke, at tabellen, der omhandler Frankrig, lader til i meget høj grad at vise, at formlen er eksakt, da disse observationer er baseret på de største tal og er blevet indsamlet med større omhu. Hvad resten angår, kan kun fremtiden vise os den rigtige måde at repræsentere den begrænsende kraft, som vi har repræsenteret ved ϕp.