

Opgaver hørende til undervisningsmateriale om logistisk vækst

Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen (2014). *Vækst i nationens tjeneste. Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. København: Matematiklærerforeningen

Opgave 3.1 Find oplysninger om THOMAS ROBERT MALTHUS' (1766–1834) arbejde og om hvordan MALTHUS har påvirket teorier om økonomi og befolkning. Har han stadig en stor betydning?

Opgave 3.2 (Eksponentiel vækst) Tegn en grafisk (kvalitativ) repræsentation af en kurve af den form, som MALTHUS beskrev for befolkningers vækst.

Opgave 3.3 (Fremskrivning af USAs befolkning) Denne opgave undersøger PIERRE-FRANÇOIS VERHULSTS (1804–1849) fremskrivning af USA's befolkning ud fra de data, han havde til rådighed.

- a) Bestem forskriften for befolkningsudviklingen i tabel 3.1(a) vha eksponentiel regression. Bestem T_2 .

På baggrund af tabel 3.1(a) beregner VERHULST tabellen 3.1(b).

- b) Hvad er der i tabel 3.1(b) sket med befolkningen i årene 1790, 1800 osv?
- c) Hvordan er befolkningerne for årene 1795, 1805, 1815, 1825 og 1835 bestemt? Hvordan passer det med, at VERHULST mener, at befolkningen vokser eksponentielt?
- d) Hvordan har VERHULST fundet r ? Hvad ville vi kalde r ? (Hint: VERHULST vil gerne vise, at T_2 er 25 år). Bemærk, at VERHULST har begået nogle afrundingsfejl i nogle af beregningerne af r .
- e) Sammenlign VERHULSTS resultater med dine egne resultater i opgave a). Overvej forskellen i den måde, hvorpå VERHULST tænkte, i forhold til, hvordan vi ville gribe sagen an i dag. Hvilke udfordringer kan VERHULST have haft med sin tilgang?

Opgave 3.4 (Dæmpet vækst) Tegn en grafisk (kvalitativ) repræsentation af en kurve af den form, som VERHULST beskrev, hvor „det øgede afkast, til stadighed er aftagende“.

Opgave 3.5 (SVÆR!) Kan du omformulere beskrivelsen „det øgede afkast, til stadighed er aftagende“ til matematisk notation? Har VERHULST ud fra denne præcisering faktisk ret i, at „den potentielle befolkningsvækst en [har] grænse, og befolkningen vil derfor i højere og højere grad bevæge sig mod at blive konstant“?

Opgave 3.6 Formlen (3.4) tillader altså at bestemme bæreevnen ud fra tre ækvidistante målepunkter under antagelse af, at væksten er logistisk. Benyt data om Danmarks befolkningstal i 1901, 1926, 1951, 1976 og 2001 fra Danmarks Statistik til at bestemme bæreevnen ud fra henholdsvis målepunkterne

- 1901-1951-2001
- 1901-1926-1951
- 1951-1976-2001
- 1926-1951-1976

Forklar hvorfor formlen giver så forskellige værdier for bæreevnen af den danske befolkning.

Opgave 3.7 VERHULSTS artikel er ledsaget af fire tabeller, som han har konstrueret ud fra de tilgængelige data.

1. Verificér beregningerne ud fra VERHULSTS formel i nogle af linjerne i tabellerne. Nogle gange stemmer hans tal ikke helt præcist; hvad kan være årsager til det? Hvordan mon beregningerne er foregået, når nu VERHULST ikke havde et regneark eller en regnemaskine til sin rådighed?
2. Udvælg en af tabellerne og foretag en logistisk regression af de observerede data ved hjælp af et CAS-værktøj. Hvor godt passer den på VERHULSTS beregnede tal? Kommentér på årsagerne til afvigelser.
3. Kommentér på udvalgte, abnorme data, fx befolkningstilvæksten i Rusland i 1813. Overvej også hvor sikre VERHULSTS data er.

Opgave 4.1 (Europakortets udvikling) Ved at sammenholde politiske kort over Europa (fx <http://www.euratlas.net/history/europe/1800/index.html> og <http://www.euratlas.net/history/europe/1900/index.html>) kan man få et visuelt indtryk af, hvordan en række europæiske småstater i løbet af 1800-tallet blev samlet i store, nye (national)stater.

Opgave 5.1 I kilden har VERHULST valgt at betragte *dæmpningsfunktionen* $\phi(p) = np^2$ som korrektion til MALTHUS' påståede eksponentielle vækst. I denne opgave skal vi udfolde og studere et alternativ til denne model.

1. Sæt $\phi(p) = np^3$ for en konstant n . Opskriv først differentialligningen parallel til VERHULSTS §10 for dette tilfælde.
2. Udled så en formel for t som en funktion af p (og konstanterne m og n).
3. Udled ud fra den opstillede formel en metode til at bestemme parametrene m og n ud fra tre data-punkter med samme tidsafstand. Du skal altså ud fra værdierne $p(t - \Delta t), p(t), p(t + \Delta t)$ blive i stand til at bestemme m, n ved en formel.
4. Udled ud fra formlen, som du fandt i punkt 2, en formel for p som en funktion af t (og parametrene m og n). Denne formel skal altså være en parallel til den formel, som VERHULST fandt i §11.
5. Hvad sker der med $p(t)$ som du fandt i den foregående opgave, når t bliver meget stor ($t \rightarrow \infty$)? Du kan til denne opgave med fordel bruge *l'Hospitals formel* (se kapitel 6), men man kan også klare sig uden. Opstil en formel for $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ som funktion af parametrene m, n .
6. Betragt nu VERHULSTS datasæt for Belgiens befolkning (tabel 3.3) og tag udgangspunkt i data for årene 1815, 1824 og 1833. Bestem parametrene m og n ved hjælp af formlen fundet i punkt 3.
7. Brug formlen fra punkt 5 til at bestemme bæreevnen for Belgiens befolkning på grundlag af parametrene fundet i punkt 6.
8. Brug et egnet computerprogram til at plotte data for Belgiens befolkning (tabel 3.3) sammen med funktionen fundet i punkt 4 og funktionen bestemt under VERHULSTS model (§11). Diskutér om VERHULST har ret i, at begge modeller passer lige godt med data.
9. Sammenlign din værdi for Belgiens bæreevne fundet i punkt 7 med den bæreevne, som forudsiges af VERHULSTS model.
10. VERHULSTS tabel med data om Belgiens befolkning har kun et ganske begrænset antal datapunkter fordelt over et kort interval. Brug data om Danmarks befolkning fra 1900 til 2000 fra Danmarks Statistik til at gentage undersøgelserne fra punkt 8 og 9. Diskutér om VERHULSTS påstand kan siges at være underbygget af dine observationer.

Opgave 5.2 I kilden har VERHULST præsenteret sin model samt nogle bemærkninger om, hvordan den forudgående modelleringsproces har fundet sted, og hvilke faktorer, der har spillet ind i den. I denne opgave skal vi perspektivere og diskutere den matematiske modelleringsproces.

1. Redegør først for den matematiske modelleringsproces sådan som den fremstilles i (Kjeldsen, 2011, s. 141–157; Poulsen, 2001; eller Johansen og Sørensen, 2014, kap. 10). Læg særlig vægt på at forklare hvordan den matematiske model er forbundet med det udsnit af virkeligheden, som man søger at modellere. Det vil sige, at du skal kigge særligt efter beskrivelser af, hvordan modellen opstilles, og hvordan den kan bruges til at sige noget om virkeligheden. Hvilken slags viden kan matematiske modeller give os om virkeligheden?
2. Analysér nu VERHULSTS kilde for at finde frem til de steder, hvor han forklarer eller kommenterer sin model. Hvad siger han fx om forbindelsen mellem modellen og de faktiske befolkningsstørrelser? Igen skal du både fokusere på opstillingen af modellen og karakteren af den viden, modellen kan give os om virkeligheden.
3. Diskutér det perspektiv på den matematiske modelleringsproces, som du har opnået i de foregående punkter, ved at perspektivere den slags viden, som matematiske modeller kan give os om virkeligheden.

Opgave 5.3 Enhver matematisk kreation er skabt i en specifik kontekst, og tit kan det være vigtigt og informativt at kende til denne kontekst for at forstå og forklare den skabte matematik, dens formål og dens betydning. I denne opgave skal vi udfolde nogle relevante aspekter omkring VERHULSTS modellering.

1. Start med at sammenligne de to Europakort (figur 4.1) og beskriv de nationale forandringer, som kortene fremviser.
2. Søg på nettet om Wienerkongressen og beskriv i flere detaljer, de forandringer, som den betød for Danmarks grænser og for dens betydning for Nederlandene.
3. Adskillige europæiske nationer fik i 1830–1850 nye forfatninger; således for Belgien i 1831 og for Danmark i 1848. Junigrundloven var blandt andet baseret på den belgiske forfatning. Analysér Junigrundlovens beskrivelse af den enkelte borgers demokratiske rettigheder (kapitel IV). Hvem var omfattet? Hvilken fordeling af den demokratiske magt førte dette til?
4. De nye statsdannelser var i høj grad baseret på *nationale tilhørsforhold*. Redegør for forskellen mellem den enevældige stat og nationalstaten, idet du fokuserer på karakteren af statens *afgrænsning*.

De mange nye stater i Europa havde behov for at skabe deres egen identitet. Dette var både en bevidst proces og baggrund for selve forandringen i statsopfattelsen. Dette skal belyses fra forskellige vinkler.

5. Analysér udvalgte danske nationalromantiske værker (digte og malerier) fra perioden 1830–1850, idet du fokuserer på at analysere deres bidrag til at skabe national identitet. Du bør fra fx dansk eller historie inddrage viden om værkernes kontekst og fortolkning i din analyse.

En vigtig del af den nye statsdannelse bestod i en institutionel udvikling af det administrative system i retning af at understøtte parlamentariske og demokratiske beslutningsprocesser.

6. I Danmark blev der i 1849 (bemærk årstallet) oprettet et *Statistisk Bureau*, som er forløberen for vore dages *Danmarks Statistik*. Hvad kan du finde ud af om dette bureau og baggrunden for dets oprettelse?
7. Den geografiske opmåling af Danmark blev påbegyndt under ledelse af Videnskabernes Selskab i slutningen af 1700-tallet. Hvad kan du finde ud af om dette projekt og de matematikere, der var med til at gennemføre det?

Opgave 5.4 Som baggrund for VERHULSTS modellering ligger den antagelse, at sociale og menneskelige forhold er reguleret af „lovmæssigheder“ og kan studeres på samme måde som naturen. Dette forhold og de konsekvenser, det synspunkt har, skal udfoldes og diskuteres i denne opgave.

1. Ideen om en 'social fysik' som studiet af sociale forhold underlagt lovmæssigheder analoge til naturlovene går tilbage til videnskabsmændene og filosofferne ADOLPHE QUETELET (1796–1874) og AUGUSTE COMTE (1798–1857). Redegør for, hvad QUETELET mener, når han i (Quetelet, 1835) taler om 'det gennemsnitlige menneske'. Hvad kan du ellers finde ud af om QUETELET'S og COMTE'S sociale fysik?

Mennesker og deres egenskaber er blevet kvantificeret på mange måder igennem tiderne. Et af målene med tilordning af tal til individer har også været at definere, hvad det vil sige at være 'normal' — og til tider 'ideal'. Denne opgave handler om at betragte forskellige eksempler på dette fænomen.

2. I billedkunst (malerier og især skulpturer) er de menneskelige proportioner blevet sat i forbindelse med talforhold, ikke mindst for at beskrive 'det ideale menneske'. Analysér udvalgte værker af fx VITRUV (ca. 75 f.v.t.–ca. 25 f.v.t.), LEONARDO DA VINCI (1452–1519) eller LE CORBUSIER (1887–1965) med fokus på deres beskrivelse og brug af ideale menneskelige proportioner.
3. Man har også forsøgt at benytte menneskelige proportioner til at udtale sig om ikke-fysiske ting, fx personlighed, intelligens eller tilbøjelighed til kriminalitet. Mest udtalt kom dette til udtryk i pseudo-videnskaben *frenologi*, som blev taget ganske seriøst i 1800-tallet. Hvad kan du finde ud af om frenologi?
4. Til at illustrere, at kvantificering også bruges til at definere *det normale*, skal du redegøre for ideen om et 'body mass index', som går tilbage til QUETELET.

I det foregående har du undersøgt nogle anvendelser af kvantificering af sociale og menneskelige domæner. Disse er ikke værdineutrale, hvilket du nu skal arbejde med at analysere.

5. Redegør for MALTHUS' politiske og filosofiske standpunkt, som ligger til grund for hans model for befolkningsvækst. Hvilke syn på revolution og demokrati ligger bag dette standpunkt?
6. Kvantificering af mennesker ligger selvfølgelig bag demokratiske styreformer, hvor alle stemmer tæller lige. Men det er ikke (og har ikke været) uproblematisk at beslutte, *hvilke* stemmer, der skal tælle med. Analysér udvalgte demokrati-kritiske tænkere med særlig fokus på, hvordan de fremstiller kvantificeringen af mennesker.
7. Kvantificering af mennesker kan imidlertid også føre til *fremmedgørelse* og tab af individualitet og identitet. Analysér udvalgte værker (især skønlitteratur og film) for fremstillinger af denne form for fremmedgørelse igennem kvantificering. Eksempler kunne fx omfatte CHARLES DICKENS' (1812–1870) roman *Hard Times* (1854) eller afsnit af TV-serien "The Prisoner" (1967). Nogle gange er disse fremmedgørelser koblet med bestemte politiske doktriner; diskutér derfor også i forlængelse af den foregående opgave.

REFERENCER

- Danielsen, Kristian og Henrik Kragh Sørensen (2014). *Vækst i nationens tjeneste. Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. København: Matematiklærerforeningen.
- Johansen, Mikkel Willum og Henrik Kragh Sørensen (2014). *Invitation til matematikkens videnskabssteori*. København: Forlaget Samfundslitteratur.
- Kjeldsen, Tinne Hoff (2011). *Hvad er matematik?* København: Akademisk Forlag.
- Poulsen, Ebbe Thue (2001). „Matematikken og virkeligheden“. I: *Matematikken og Verden*. Udg. af Mogens Niss. Fremads debatbøger — Videnskaben til debat. København: Fremad. Kap. 1, s. 19–36.
- Quetelet, A. (1835). *Sur l'homme et le développement de ses facultes, ou essai de physique sociale*. Paris: Bachelier.