Logistisk vækst: et matematikhistorisk projektarbejde

Andreas Hermansen, Egå Gymnasium

12. april 2016

Dette dokument er et elevhæfte udviklet til 3vMA 2015/16 på Egå Gymnasium med henblik på at gennemgå Pierre-François Verhulsts (1804–1849) beskrivelse af Belgiens befolkningsvækst. Det estimerede tidsforbrug er 3 lektioner. Dokumentet indeholder dels udklip fra lærervejledningen *Vækst i nationens tjeneste* (Danielsen og Sørensen, 2014) inklusiv udklip fra oversættelsen af Verhulsts oprindelige tekst. Dokumentet er struktureret ved bemærkninger skrevet med rødt.

Indhold

INTRO: VERHULSTS MATEMATIK VS. MODERNE MATEMATIK

Den vækstmodel, som VERHULST fandt frem til i 1830'erne, noterede han som følgende differentialligning

$$\frac{dp}{dt} = mp - np^2$$

med løsning

$$p = \frac{mp' e^{mt}}{np' e^{mt} + m - np'}$$

hvor p' betegner befolkningens størrelse for $t = 0$.

Den differentialligning kender vi i dag som en beskrivelse af det, vi kalder "logistisk vækst", og vi skriver den på følgende måde

$$y' = y(b - ay)$$

med løsning

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-bx}}$$

Denne differentialligning er kernestof i Matematik A på STX, og der kan således komme opgaver i den til jeres skriftlige eksamen.

Hvis vi på et tidspunkt har tid til det kan vi prøve om vi kan vise, at de to differentialligninger udtrykker det samme.

MALTHUS OG EKSPONENTIEL VÆKST

I har læst følgende:

§1 Verhulst (1838, 113):

Man ved, at den berømte *Malthus* har fastslået det princip, at en given befolkning tenderer mod at vokse eksponentielt således, at den fordobles over en bestemt periode f.eks. femogtyve år. Denne lovmæssighed er ubestridelig, hvis man ser bort fra, at når befolkningen har nået en vis tæthed, vil det være en stadigt voksende udfordring at skaffe sig fornødenheder, eller de ressourcer, som er nødvendige for, at befolkningen kan vokse, selv for et helt nyt samfund, som f.eks. en større fordeling af arbejdet, en legitim regering og midler til forsvar, så man kan bevare den offentlige ro, etc.

Læs nu dette:

Den „berømte Malthus“, som Verhulst omtaler, er den britiske økonom Thomas Robert Malthus (1766–1834), der er kendt for sine tanker om befolkningsvækst i værket „An Essay on the Principle of Population“ fra 1798 (Malthus, 2008; se også Winch, 2013). Malthus viser deri, at befolkningen vil vokse eksponentielt, hvis den ikke begrænses. Verhulst opfatter Malthus’ model som en lovmæssighed. Man kan diskutere, hvad han mener med en „ubestridelig lovmæssighed“, om det er på lige fod med en lovmæssighed i fysik, eller om den forstås anderledes, og om og hvordan man sådan kan overføre fysikkens love til beskrivelse af samfundet.

Og løs følgende opgaver:

Opgave 3.1 Find oplysninger om Malthus’ arbejde og om hvordan Malthus har påvirket teorier om økonomi og befolkning. Har han stadig en stor betydning?

Opgave 3.2 (Eksponentiel vækst) Tegn en grafisk (kvalitativ) repræsentation af en kurve af den form, som Malthus beskrev for befolkningers vækst.

BEFOLKNINGSVÆKSTEN I USA

I har læst følgende:

§2 Verhulst (1838, 113):

Altså, *alt andet lige*, hvis tusind sjæle er blevet til to tusinde sjæle på femogtyve år, så vil de to tusinde blive til fire tusinde efter den samme tidsperiode.

Læs nu dette:

Det kan virke som en tilfældighed, at VERHULST bruger 25 år som eksempel, men hvis man ser på hans senere artikel (Verhulst, 1845), kan man se, at det er inspireret af befolkningsudviklingen i USA. Tabellerne 1(a) og 1(b) stammer fra denne senere artikel (ibid.).

Og løs følgende opgave ud fra data i tabel 1 længere nede:

Opgave 3.3 (Fremskrivning af USAs befolkning) Denne opgave undersøger VERHULSTS fremskrivning af USA's befolkning ud fra de data, han havde til rådighed.

a) Bestem forskriften for befolkningsudviklingen i tabel 1(a) vha eksponentiel regression. Bestem T_2.

På baggrund af tabel 1(a) beregner VERHULST tabellen 1(b).

b) Hvad er der i tabel 1(b) sket med befolkningen i årene 1790, 1800 osv?

c) Hvordan er befolkningerne for årene 1795, 1805, 1815, 1825 og 1835 bestemt? Hvordan passer det med, at VERHULST mener, at befolkningen vokser eksponentielt?

d) Hvordan har VERHULST fundet r? Hvad ville vi kalde r? (Hint: VERHULST vil gerne vise, at T_2 er 25 år). Bemærk, at VERHULST har begået nogle afrundingsfejl i nogle af beregningerne af r.

e) Sammenlign VERHULSTS resultater med dine egne resultater i opgave a). Overvej forskellen i den måde, hvorpå VERHULST tænkte, i forhold til, hvordan vi ville gribe sagen an i dag. Hvilke udfordringer kan VERHULST have haft med sin tilgang?

Årstal	Befolkning
1790	3.929.827
1800	5.305.925
1810	7.239.814
1820	9.638.151
1830	12.866.020
1840	17.062.566

(a) Tabellen over USAs befolkning, 1790–1840 fra Verhulst (1845).

Årstal	Befolkning	r
1790	3.930.000	
1795	4.618.000	
1800	5.306.000	
1805	6.273.000	
1810	7.240.000	
1815	8.439.000	2,147
1820	9.638.000	2,087
1825	11.252.000	2,120
1830	12.866.000	2,052
1835	14.964.000	2,076
1840	17.063.000	2,021

(b) Beregnet tabel baseret på Verhulst (1845).

Tabel 1: Verhulsts tabeller for USAs befolkning.

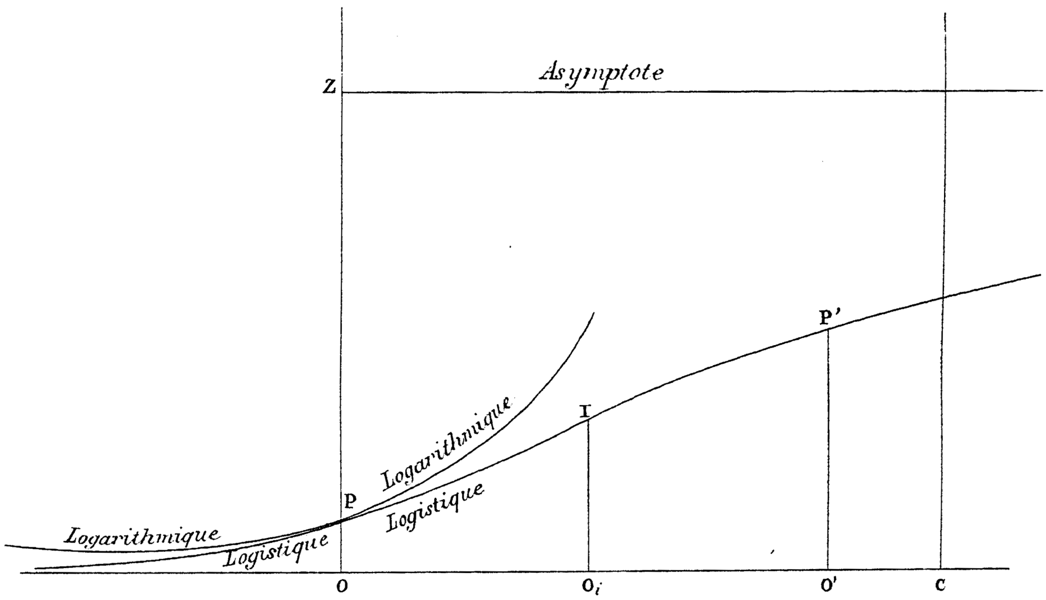
VERHULSTS OVERVEJELSER OMKRING EKSPONENTIEL OG LOGISTISK VÆKST

I har læst følgende:

§3 Verhulst (1838, 113):

I vores gamle europæiske samfund, hvor det gode land er blevet opdyrket gennem lang tid, vil det arbejde, der lægges i at forbedre en allerede opdyrket mark, ikke kunne forhindre, at det øgede afkast til stadighed er aftagende; forudsat at man i de første femogtyve år har fordoblet afkastet af jorden, vil man i den anden periode knap kunne producere en tredjedel oveni. Begrænsningen af udstrækningen og frugtbarheden af landet giver altså den potentielle befolkningsvækst en grænse, og befolkningen vil derfor i højere og højere grad bevæge sig mod at blive konstant.

Betragt nu følgende figur:



Og læs det her:

I paragrafferne 3, 4 og 8 sammenligner Verhulst befolkningsvæksten og udnyttelsen af jorden. I sin senere artikel (Verhulst, 1845) uddyber han denne sammenhæng, hvor der er tale om fire faser. Disse faser sammenlignes med forløbet af den logistiske kurve. Man kan se det på ovenstående graf.

I den første fase vokser befolkningen eksponentielt. Der er altså i virkeligheden ikke tale om logistisk vækst i begyndelsen, men eksponentiel vækst. Ved tiden *O* ændrer den eksponentielle vækst sig til en logistisk vækst; dette sker i punktet *P*. I denne fase er det kun den bedste landbrugsjord, der bruges. I Europa ligger denne fase meget langt tilbage i tiden, men det er også det, der sker, når et nyt område koloniseres, og VERHULST kender til dette fra befolkningen i USA (§4).

I den anden fase begynder man at udnytte den knap så gode jord, og befolkningensvæksten ændrer sig til en logistisk vækst. Denne fase ligger mellem tidspunkterne O og O_i.

I den tredje fase inddrager man også den dårlige jord. Den tredje fase ligger mellem tidspunkterne O_i og O'. Længden af den anden og tredje periode er den samme.

I punktet I, der adskiller den anden og den tredje periode, er befolkningen halvdelen af den maksimale befolkning. Det er også her, at kurven ændrer sig fra at være konveks til at være konkav.

I den sidste fase er den eneste mulighed for at skaffe sig flere fødevarer ved forbedring af den allerede opdyrkede jord og handel. Det er her vi nærmer os begrænsningen for befolkningen.

VERHULST skriver ikke, hvor han har fået ideen til at inddele menneskets historie i fire faser fra, men inddelingen kendes helt tilbage fra den græske mytologi. Her taler man om de fire verdensaldre: guldalderen, sølvalderen, bronzealderen og jernalderen. I den første alder er livet let; man behøver stort set ikke gøre noget for at dyrke jorden. Men i de efterfølgende aldre bliver vilkårene efterhånden mere og mere vanskelige.

Og løs så denne opgave:

Opgave 3.4 (Dæmpet vækst) Tegn en grafisk (kvalitativ) repræsentation af en kurve af den form, som VERHULST beskrev, hvor „det øgede afkast, til stadighed er aftagende“.

DEN EKSPONENTIELLE DIFFERENTIALLIGNING

Den eksponentielle differentialligning kender I som $y' = k \cdot y$. Det følgende længere tekststykke forklarer, hvordan VERHULST kommer frem til, at han må konstruere en model der 1) i begyndelsen er eksponentiel, 2) men som hurtig dæmpes og 3) har en øvre grænse.

§4 Verhulst (1838, 114):

Det sker ikke i enkelte helt ekstraordinære tilfælde, som for eksempel når et civiliseret folk opdyrker et frugtbart område, der endnu ikke er befolket, eller man driver en produktion, som giver store midlertidige fordele. En stor familie bliver i disse tilfælde en rigdom, og den næste generation har lettere ved at etablere sig, fordi den ikke ligesom den første generation skal overvinde de forhindringer, som et uopdyrket land giver de første nybyggere.

Her tænker VERHULST på nogle særlige situationer. Den ene er kolonialisering, hvor man kommer til et nyt uopdyrket område. Som vi tidligere har set, har VERHULST vist, at befolkningen i USA vokser eksponentielt. Det andet tilfælde drejer sig om det, der sker under industrialisering. I Belgien har man skabt en stor stålproduktion og en stor mineindustri, hvor der netop er behov for mange mennesker.

§5 Verhulst (ibid., 114):

For at vurdere den hastighed, befolkingen vokser med i et givet land, må man dividere befolkningsvæksten for hvert år med den befolkning, som ligger til grund for denne vækst. Dette forhold, som er uafhængigt af befolkningens absolutte størrelse, kan ses som et udtryk for denne hastighed. Hvis forholdet er konstant, vokser befolkningen eksponentielt; hvis det er voksende, vokser befolkningen hurtigere end eksponentielt, og mindre end eksponentielt hvis det er aftagende.

VERHULST betragter her $\frac{y'}{y}$. Når $\frac{y'}{y} = a$, er der tale om en eksponentiel funktion. Dette kan man lade elever finde ud af ved at løse differentialligningen. I de to andre tilfælde er der mange forskellige måder, hvorpå forholdet kan være mindre end eller større end en konstant. For at illustrere det kan man se på den situation, hvor $\frac{y'}{y} = ax + b$. I tilfældet hvor forholdet er konstant, er $a = 0$. Hvis det er voksende, er a positiv, og endelig er a negativ, hvis det er aftagende.

§6 Verhulst (ibid., 114):

Man kan komme med forskellige hypoteser om, i hvilken grad modstanden, dvs. summen af forhindringer, modvirker befolkningens uhæmmede vækst. M. *Quetelet* antager, modstanden er proportional med *kvadratet på den hastighed, som befolkningen vokser med.*[a]

[a] *Essai de physique sociale,* 1. udg., s. 277.

§7 Verhulst (ibid., 114):

Det svarer til at sammenligne væksten af befolkningen med bevægelsen af et objekt, der falder gennem et miljø med modstand. Resultaterne af denne sammenligning er på tilfredsstillende vis i overensstemmelse med statistisk data og med de resultater, jeg selv har fået ved at antage, at det miljø, der er tale om, har en uendeligt voksende densitet.

§8 Verhulst (ibid., 114–115):

Befolkningsvæksten har nødvendigvis en grænse, om ikke andet så i udstrækningen af land, hvor befolkningen kan bosætte sig. Når en nation har opbrugt alle landets afgrøder, kunne man i virkeligheden skaffe sig fornødenheder udefra i bytte for andre produkter og på den måde understøtte en ny befolkningsvækst. Men det er klart, at denne import vil have begrænsninger og vil stoppe længe før hele landet er dækket af byer. Alle formler, man vil forsøge at bruge til at beskrive befolkningsvæksten, må altså indeholde et *maximum*, som kun bliver nået i en uendelig fjern fremtid. Dette *maximum* vil så være antallet af personer, når befolkningen er blevet konstant.

Læg godt mærke til hvad Verhulst skriver i paragraf 9:

§9 Verhulst (ibid., 115):

Jeg har længe forsøgt at analysere mig frem til den mest sandsynlige lov for befolkningsvækst, men jeg har opgivet denne fremgangsmåde, fordi der er for få af de givne størrelser, der kan bestemmes ved observationer, til, at man kan være sikker på, at formlerne er eksakte. Da jeg alligevel er overbevist om, at den fremgangsmåde, jeg har brugt, når man har fået bestemt tilstrækkeligt mange af de givne størrelser, i sidste ende vil føre frem til den rigtige lovmæssighed, og at de resultater, jeg er kommet frem til, vil vække interesse, om ikke andet så som genstand for eftertanke, har jeg set mig nødsaget til at tage imod M. *Quetelets* invitation og offentliggøre dem.

UDLEDNING AF ET UDTRYK FOR t

Verhulst angiver i paragraf 10 nedenfor metoden til at finde den dæmpede vækstfunktion, som han nu har argumenteret sig frem til, må være den bedste til at beskrive befolkningsvækst. Men han forklarer ikke i detaljer, hvordan han er fundet frem til udtrykket $t = \frac{1}{m}(\ln(p) - \ln(m - np)) + k$. Det bliver vores første matematiske opgaver at gennemskue. Metoden kræver dels anvendelse af separation af variable, dels et trick der kaldes partialbrøksmetoden — det ser vi nærmere på i fællesskab. Hvis I er nogle af de første i klassen til at nå hertil, så spring videre til næste afsnit.

§10 Verhulst (1838, 115):

Lad p være en befolkning: lad dp være den uendeligt lille befolkningsvækst, der forekommer i det uendeligt lille tidsrum dt. Hvis befolkningen vokser eksponentielt, får vi ligningen $\frac{dp}{dt} = mp$. Men eftersom hastigheden af befolkningsvæksten falder med størrelsen af befolkningen, er vi nødt til at trække en ukendt funktion af p fra mp, således at formlen bliver

$$\frac{dp}{dt} = mp - \phi(p).$$

Den mest simple funktion ϕ, man kan tænke sig, er at antage $\phi(p) = np^2$. Ved integration finder man nedenstående ligning

$$t = \frac{1}{m}[log.p - log.(m - np)] + \text{konstant},$$

og man behøver da kun tre observationer for at bestemme de to koefficienter n og m og den vilkårlige konstant.

UDLEDNING AF ET UDTRYK FOR p

Verhulst skriver følgende:

§11 Verhulst (ibid., 115):

Ved at løse ovenstående ligning mht. p fremkommer

$$p = \frac{mp'e^{mt}}{np'e^{mt} + m - np'}, \tag{i}$$

hvor p' betegner befolkningen for $t = 0$, og e betegner grundtallet for den naturlige logaritme. Hvis man sætter $t = \infty$, ser man, at den tilhørende værdi for p er $P = \frac{m}{n}$. Dette er altså *den øvre grænse for befolkningen*.

I skal nu selv forsøge at komme frem til dette udtryk ud fra udtrykket for t:

$$t = \frac{1}{m}(\ln(p) - \ln(m - np)) + k$$

Til det får I brug for følgende:

1. Benyt logaritmeregneregler og omskriv til $mt - mk = \ln\left(\frac{p}{m-np}\right)$.
2. Omskriv til $m \cdot \frac{e^{mt}}{e^{mk}} = \left(1 + n \cdot \frac{e^{mt}}{e^{mk}}\right) \cdot p$ ved hjælp af eksponentiering (altså at ophæve logaritmen ved at opløfte med e).
3. Omskriv til $p = \frac{me^{mt}}{ne^{mt}+e^{mk}}$.
4. For at nå i mål har vi nu brug for et udtryk for e^{mk}, som vi kan sætte ind i udtryk 3. For at finde dette udtryk for e^{mk} skal I udnytte, at Verhulst har defineret $p(0) = p'$, hvor p intet har med differentiering at gøre, men svarer til det vi normalt kalder p_0, dvs. funktionsværdien til tiden $t = 0$. Indsæt derfor $t = 0$ og p' i ligningen $t = \frac{1}{m}(\ln(p) - \ln(m - np)) + k$ og find frem til følgende $e^{mk} = \frac{m-np'}{p'}$.
5. Indsæt udtrykket for e^{mk} i udtryk 3 og omskriv til Verhulsts udtryk for differentialligningens løsning, nemlig $p = \frac{mp'e^{mt}}{np'e^{mt}+m-np'}$.

Og hva' så?

Nu har I måske en følelse af "Nå, og hvad så?". MEN det udtryk, I har her, er helt afgørende for Verhulsts forståelse af befolkningsvækst. Udtrykket lever nemlig op til alle Verhulsts krav til en god model. Særligt har den en øvre grænse. Det kan vi indse ved at omskrive udtryk 5 til følgende:

$$p = \frac{mp'}{np' + \frac{m-np'}{e^{mt}}}$$

Opgave

- Hvad sker der med p i udtrykket overfor, når t bliver stor?
- Hvad er den øvre grænse for befolkningens størrelse?

Bæreevne

Et af de interessante spørgsmål, som VERHULSTS model kan hjælpe med at besvare, er:

- Hvad er den øvre grænse for hvor stor en befolkning kan blive i et land? Sagt på en anden måde kan man spørge: Hvad er bæreevnen?

Opgave

- Hvorfor er det spørgsmål interessant?

Beregning af bæreevne

I 1845 præsenterer VERHULST i en anden artikel en metode til at beregne bæreevnen for et land givet 3 ækvidistante målepunkter (ækvidistant betyder at målepunkterne er lige langt fra hinanden). Vi vil nøjes med at anvende hans formel til at beregne bæreevnen for Danmark ud fra fire forskellige sæt af datapunkter.

Formlen er:

$$\frac{m}{n} = \frac{-2p_1p_2p_3 + p_2^2(p_3 + p_1)}{p_2^2 - p_1p_3} = p_2\frac{p_2(p_1 + p_3) - 2p_1p_3}{p_2^2 - p_1p_3}. \tag{1}$$

Og I kan nu løse følgende opgave:

Opgave 3.6 Formlen (1) tillader altså at bestemme bæreevnen ud fra tre ækvidistante målepunkter under antagelse af, at væksten er logistisk. Benyt data om Danmarks befolkningstal i 1901, 1926, 1951, 1976 og 2001 fra Danmarks Statistik til at bestemme bæreevnen ud fra henholdsvis målepunkterne

- 1901-1951-2001
- 1901-1926-1951
- 1951-1976-2001
- 1926-1951-1976

Forklar hvorfor formlen giver så forskellige værdier for bæreevnen af den danske befolkning.

REFERENCER

Danielsen, Kristian og Henrik Kragh Sørensen (2014). *Vækst i nationens tjeneste. Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. København: Matematiklærerforeningen.

Malthus, T. R. (2008). *An Essay on the Principle of Population*. Med en indl. af Geoffrey Gilbert. Oxford World's Classics. Oxford m.fl.: Oxford University Press.

Verhulst, P.-F. (1838). „Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement". *Correspondance mathématique et physique de l'Observatoire de Bruxelles*, bd. 10, s. 113–121.

— (1845). „Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population". *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, bd. 18, s. 1–38.

Winch, Donald (2013). *Malthus*. A very short introduction 357. Oxford m.fl.: Oxford University Press.