Logistisk vækst: Arbejdsark til matematikhistorisk perspektiv på AT-forløb om globalisering

Aase Sejr Gothelf, Aarhus Katedralskole

4. april 2016

Uddrag af hæftet *Vækst i nationens tjeneste* (Danielsen og H. K. Sørensen, 2014) blev af Aase Sejr Gothelf anvendt i forbindelse med et AT-forløb i 3.g for en klasse med matematik på A-niveau på Aarhus Katedralskole. AT-forløbets overordnede titel var „Globalisering“ og de deltagende fag var historie og matematik.

I historie blev følgende emner behandlet:

- Globalisering historisk set — definitioner og faser.
- Industrialisering og befolkningsvækst — er der en sammenhæng? Thomas Robert Malthus (1766–1834).
- Befolkningsudvikling: model og virkelighed (den demografiske transition, befolkningspolitik, udvandring m.v.).
- Globalisering og befolkningsudvikling. Zygmundt Baumann (f. 1925).

I matematik var hovedemnerne:

- Differentialligninger.
- Eksponentiel og logistisk vækst.
- Matematisk modellering.

Forløbet blev afsluttet med gruppearbejde ud fra følgende opgave:

- I skal ud fra fagene matematik og historie undersøge udviklingen i et lands befolkningsvækst og demografi.
- I undersøgelsen skal bl.a. indgå
  - en præsentation af relevant teori om befolkningsudvikling, og
  - overvejelser om, i hvilket omfang de faktiske forhold i landet stemmer overens med befolkningsteorierne.

Her præsenteres tre arbejdssedler, som relaterer til materialet i *Vækst i nationens tjeneste*. Yderligere arbejdssedler har understøttet det interne matematik-faglige arbejde i forløbet.

Der refereres undervejs både til AT-forløbet *Det gode argument* mellem matematik og dansk, som eleverne havde i 1.g og til lærebogssystemet *plus A3 stx* (J. S. Sørensen m.fl., n.d.).

Indhold

OPSAMLING: LOGISTISK VÆKST OG VERHULST

Opsamling

1. Hvad er logistisk vækst? Forklar med ord.
2. Sammenlign jeres resultater fra sidste spørgsmål på arbejdsarket fra sidst:
   a) Hvordan ser den tegnede kurve ud?
   b) Hvad er jeres beregnede resultater?
   c) Sammenlign populationsstørrelse og væksthastighed og forklar, hvordan man ville aflæse disse resultater på den tegnede kurve.
3. Find sætningen om den logistiske differentialligning i grundbogen *plus A3 stx* (J. S. Sørensen m.fl., n.d.).
   a) Grav tilbage til jeres AT-forløb i 1.g om *Det gode argument* og forklar hvad en 'sætning' egentlig er.
   b) Brug sætningen til at løse øvelse 2 (logistisk differentialligning) i *plus A3 stx* (ID: c23259).

Lige nu tager vi sætningerne for gode varer og bruger dem uden at bevise dem. Beviserne kommer vi tilbage til efter efterårsferien.

Vækst i nationens tjeneste: Verhulst

I skal nu læse igennem en dansk oversættelse af en historisk matematisk tekst. I skiftes til at læse teksten op og stopper op ved citaterne nedenfor og „undrer“ jer — altså prøver at forklare nogle af de sekvenser, der er i artiklen.

1. Stop

§2 Verhulst (1838, 113):

Altså, *alt andet lige*, hvis tusind sjæle er blevet til to tusinde sjæle på femogtyve år, så vil de to tusinde blive til fire tusinde efter den samme tidsperiode.

Opgave Spm. 1: Pierre-François Verhulst (1804–1849) refererer her til den eksponentielle vækst som Malthus beskriver befolkningsvækst med. Overvej, hvad de 25 år rent matematisk kan betegnes som, når vi taler om eksponentiel vækst.

2. Stop

§5 Verhulst (ibid., 114):

For at vurdere den hastighed, befolkingen vokser med i et givet land, må man dividere befolkningsvæksten for hvert år med den befolkning, som ligger til grund for denne vækst. Dette forhold, som er uafhængigt af befolkningens absolutte størrelse, kan ses som et udtryk for denne hastighed. Hvis forholdet er konstant, vokser befolkningen eksponentielt; hvis det er voksende, vokser befolkningen hurtigere end eksponentielt, og mindre end eksponentielt hvis det er aftagende.

Opgave Spm. 2: Søg på „relativ væksthastighed" i *plus A3 stx*. Hvordan hænger det sammen med noget af den tekst ovenfor?

Spm. 3: Forklar den sidste sætning: „Hvis forholdet er konstant, vokser …".

3. stop

§10 Verhulst (ibid., 115):

Lad p være en befolkning: lad dp være den uendeligt lille befolkningsvækst, der forekommer i det uendeligt lille tidsrum dt. Hvis befolkningen vokser eksponentielt, får vi ligningen $\frac{dp}{dt} = mp$. Men eftersom hastigheden af befolkningsvæksten falder med størrelsen af befolkningen, er vi nødt til at trække en ukendt funktion af p fra mp, således at formlen bliver

$$\frac{dp}{dt} = mp - \phi(p).$$

Opgave Spm. 4: Forklar kort sammenhæng mellem teksten og den opskrevne ligning.

4. Stop

§10 Verhulst (ibid., 115):

Den mest simple funktion ϕ, man kan tænke sig, er at antage $\phi(p) = np^2$.

Opgave Spm. 5: Opskriv differentialligningen, som den så ser ud.

Spm. 6: Omskriv differentialligningen, så den ligner én af de differentialligninger, der er i sætningen om den logistiske differentialligning i *plus A3 stx*.

Spm. 7: Brug sætningen til at opskrive en løsning til differentialligningen

5. stop

Vi springer lige videre til VERHULSTS løsning på differentialligningen (§11)

$$p = \frac{mp'e^{mt}}{np'e^{mt} + m - np'}. \tag{1}$$

Opgave Spm. 8: Find i teksten ud af hvad p' er?

Spm. 9: Hvad er p så til tiden $t = 0$?

Spm. 10: Med den oplysning, omskriv så den løsning, I fandt på differentialligningen, til det udtryk VERHULST angiver i artiklen. (Dette er en rigtig god træning af en masse brøkregneregler).

6. stop

Opgave Spm. 11: Læs artiklen færdig og diskutér, hvordan VERHULST forholder sig til de data, han bruger til at eftervise sin teori.

Spm. 12: Find nu original artiklen samt tabeller med data fra artiklen her: `http://www.matematikhistorie.dk/logistisk-vækst`.

MATEMATISK MODELLERING

I AT-forløbet *Det gode argument* arbejdede vi med matematik som en aksiomatisk-deduktiv videnskab. Vi beskrev den induktive og den deduktive metode og så at „mens naturvidenskaberne først og fremmest er karakteriseret ved den induktive metode, har matematik siden Euklid hovedsageligt arbejdet efter den deduktive metode som netop kommer til udtryk ved den meget stringente opbygning med aksiomer, definitioner, sætninger og beviser“ (Noter til *Det Gode Argument*, Aarhus Katedralskole, 2013).

Når man ser på matematikkens metoder, kan man skelne mellem skabelsen af matematisk viden og anvendelsen af matematisk viden og når man anvender matematik til at løse problemer fra virkeligheden, så anvender man *matematisk modellering*. Denne proces er beskrevet udmærket i citatet i figur 1.

Opgave 1

Opgave Diskutér det, I har læst i lektien til i dag sammenholdt med ovenstående klip fra *Hvad er matematik B* (figur 1) med fokus på at beskrive figur 2.

Opgave 2

Find nu VERHULSTS artikel fra 1838, hvor han introducerer logistisk vækst.

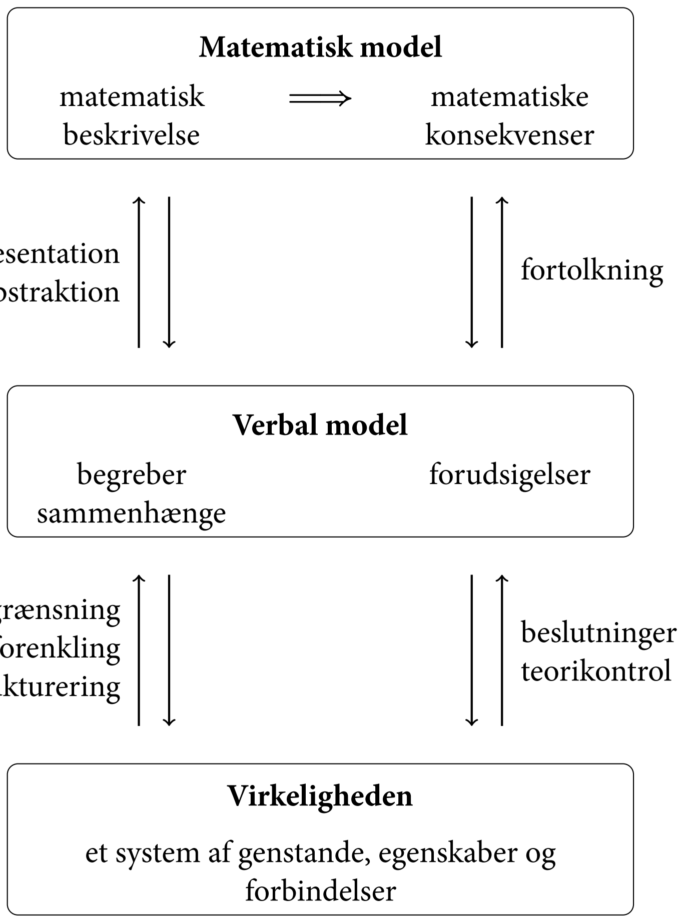
Opgave Analyser kilden for finde frem til de steder, hvor VERHULST forklarer eller kommenterer sin model:

1. Hvad siger han fx om forbindelsen mellem modellen og de faktisk befolkningsstørrelser?
2. Hvilke kriterier får VERHULST til at vælge dæmpningsleddet $\phi(p) = n \cdot p^2$?
   a) Betragt hans overvejelser med ADOLPHE QUETELET (1796–1874).
   b) Der omtales æstetiske og pragmatisk kriterier (se lektien til i dag).
3. Fokusér både på opstillingen af modellen og karakteren af den viden, modellen kan give os om virkeligheden.
4. Modelkritik er vigtigt i en modelleringsproces — så vurdér VERHULSTS model med kritiske øjne.

Virkelige problemer er ofte meget komplicerede, hvis vi skal have alle detaljer med, men ved at foretage en *idealisering*, hvor vi ser bort fra mange af disse detaljer og fokuserer på nogle få centrale variable, kan vi ofte opstille en matematisk model i form af en simpel variabelsammenhæng. Når ægyptiske matematikere regnede på rumfang af pyramider, tegnede de ikke en pyramide, som den ser ud, men ridsede en model op, hvor kun det nødvendige for opgaven var med. Når matematikere i vores tid opstiller modeller for søers forurening og evt. oprensning, fokuserer de på nogle centrale elementer: Hvor meget vand tilføres søen? Hvor forurenet er det? Hvor meget vand løber fra, siver ned i jorden eller fordamper? Der er tusindvis af andre detaljer, man kunne interessere sig for ved en sø, men i den matematiske modellering fokuserer vi på det centrale for vores problem. Dette kaldes for *idealisering* - det er altså ikke søen eller pyramiden, der er idealiseret, men selve modelleringsprocessen. En modellering indeholder derfor altid et stort *informationstab*.

En modellering starter og slutter ofte i et virkeligt problem i et andet fag. Derfor kan man have god hjælp af en viden fra andre fagområder, både i opstillingen af modellen og i fortolkningen.

Figur 1: Beskrivelse af matematisk modellering fra Grøn m.fl. (2012, s. 268).



Figur 2: En simpel model for matematisk modellering (se også Johansen og H. K. Sørensen, 2014, kapitel 10).

Opgave 3

Opgave 1. Se på den matematiske modellerings fire faser som de er beskrevet i det udleverede materiale fra *Hvad er matematik B* (Grøn m.fl., 2012, s. 269-272). Hvor passer det ind i den figur (figur 2), I diskuterede tidligere?

2. Læs eksemplet igennem — ikke så meget for at forstå detaljerne i matematikken men med fokus på den matematiske modelleringsproces.

3. I er stødt på matematisk modellering mange steder igennem matematikundervisningen og opgaveregning i gennem de sidste par år. Giv nogle eksempler.

SEPARATION AF DE VARIABLE

I Verhulsts artikel om logistisk vækst fra 1838 kommer han med denne løsning på den opstillede differentialligning $\frac{dp}{dt} = mp - np^2$:

> **§10 Verhulst (1838, 115):**
>
> Lad p være en befolkning: lad dp være den uendeligt lille befolkningsvækst, der forekommer i det uendeligt lille tidsrum dt. Hvis befolkningen vokser eksponentielt, får vi ligningen $\frac{dp}{dt} = mp$. Men eftersom hastigheden af befolkningsvæksten falder med størrelsen af befolkningen, er vi nødt til at trække en ukendt funktion af p fra mp, således at formlen bliver
>
> $$\frac{dp}{dt} = mp - \phi(p).$$
>
> Den mest simple funktion ϕ, man kan tænke sig, er at antage $\phi(p) = np^2$. Ved integration finder man nedenstående ligning
>
> $$t = \frac{1}{m}[log.p - log.(m - np)] + \text{konstant},$$
>
> og man behøver da kun tre observationer for at bestemme de to koefficienter n og m og den vilkårlige konstant.

Vær opmærksom på at Verhulst benytter betegnelsen log for den naturlige logaritme, hvor vi i dag benytter betegnelsen ln.

For at udlede ovenstående ligning ud fra differentialligningen, kan man benytte sig af en metode, der hedder *separation af de variable*.

Løsning ved separation af de variable

Tag udgangspunkt i en differentialligning af formen

$$f(y) \cdot y' = g(x),$$

som også kan skrives som

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x).$$

Hvis vi nu integrerer mht x på begge sider

$$\int f(y) \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = \int g(x)\, dx$$

og betragter $\frac{dy}{dx}$ som en brøk (ligesom vi gør, når vi laver integration ved substitution), så går dx ud med dx på venstre side, og vi får

$$\int f(y)\, dx = \int g(x)\, dx$$

Det vil sige, at vi kan integrere venstre side mht. til y og højre side mht. x. Vi har nu separeret de variable, x og y, på være sin side af lighedstegnet.

Eksempel Differentialligningen $y' = x \cdot y$, som kan skrives til $\frac{dy}{dx} = x \cdot y$ kan løses ved separation af de variable. Omskriv nemlig ligningen til

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x,$$

og idet vi sætter $f(y) = \frac{1}{y}$ og $g(x) = x$ får vi nu

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int x\, dx$$

altså

$$\ln y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + k,$$

hvorfor $\ln(y) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + k$ er en løsning til $y' = x \cdot y$.

Opgave Vis (ved separation af de variabel), at følgende differentialligninger har de angivede løsninger:

1. $\frac{dy}{dx} = -a \cdot y$ har løsningen $\ln(y) = -a \cdot x + k$.
2. $-\frac{dy}{dx} = a \cdot y^2$ har løsningen $\frac{1}{y} = a \cdot x + k$.

Vend nu tilbage til Verhulsts artikel og vis vha. separation af de variable, at løsningen til $\frac{dp}{dt} = mp - np^2$ er

$$t = \frac{1}{m}\left[log.p - log.(m - np)\right] + \text{konstant}.$$

Forklar udledningen ved at begrunde de skridtvise manipulationer angivet i figur 3.

1 $\dfrac{1}{mp - np^2}\, dp = 1\, dt$

2 $\dfrac{1}{p(m - np)}\, dp = 1\, dt$

3 $\left(\dfrac{\frac{1}{m}}{p} + \dfrac{\frac{n}{m}}{m - np}\right) dp = 1\, dt$

4 $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{m}}{p}\, dp + \int \frac{\frac{n}{m}}{m - np}\, dp = \int 1\, dt$

5 $\displaystyle\frac{1}{m}\left(\int \frac{1}{p}\, dp + \int \frac{n}{m - np}\, dp\right) = \int 1\, dt$

6 $\displaystyle\frac{1}{m}\left(\ln(p) + k_1 + \int \frac{n}{(m - np)}\, dp\right) = t + k_2$

(Hint: Hvad får du, hvis du differentierer $f(p) = \ln(m - np)$ mht. p?)

7 $\dfrac{1}{m}\left(\ln(p) + k_1 - \ln(m - np) + k_3\right) = t + k_2$

8 $t = \dfrac{1}{m}\left(\ln(p) - \ln(m - np)\right) + k$

Figur 3: Skridtvise manipulationer i løsningen af differentialligningen $\frac{dp}{dt} = mp - np^2$.

REFERENCER

Danielsen, Kristian og Henrik Kragh Sørensen (2014). *Vækst i nationens tjeneste. Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. København: Matematiklærerforeningen.

Grøn, Bjørn m.fl. (2012). *Hvad er matematik? B Grundbog*. København: L&R Uddannelse.

Johansen, Mikkel Willum og Henrik Kragh Sørensen (2014). *Invitation til matematikkens videnskabsteori*. København: Forlaget Samfundslitteratur.

Sørensen, Jens Studsgaard m.fl. *plus A3 stx*. iBog. Systime.

Verhulst, P.-F. (1838). „Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement“. *Correspondance mathématique et physique de l'Observatoire de Bruxelles*, bd. 10, s. 113–121.