

Beviser og gendrivelser



Logikken i de matematiske opdagelser

Imre Lakatos

Oversat af Kurt Ramskov 1989

Ny typografi af Henrik Kragh Sørensen 2002, 2003

Først udgivet som "Proofs and Refutations"
Cambridge University Press 1976, reprint 1988

Indhold

Typografiske kommentarer 2002/2003	4
Forfatterens indledning	5
1 Et problem og en formodning	8
2 Et bevis	9
3 Kritik af beviset ved modeksempler, som er lokale men ikke globale	13
4 Kritik af formodningen med globale modeksempler	17
4.1 Forkastelse af formodningen. Overgivelsesmetoden	18
4.2 Forkastelse af modeksemplet. Metoden at udelukke misfostre	18
4.3 Forbedring af formodningen ved undtagelsesudelukkende metoder. Skridtvis udelukkelse. Strategisk tilbagetrækning eller søgen efter sikkerhed	27

Typografiske kommentarer 2002/2003

I denne udgave er LAKATOS' omfattende noteapparat ikke medtaget. I stedet angiver en "dagger" (†) en udeladt note. Den interesserede læser bedes selv konsultere en af de andre udgaver af bogen.

Forfatterens indledning

I tankens historie sker det ofte, når en kraftig ny metode dukker op, at studiet af de problemer, som kan håndteres med denne nye metode, hurtigt går frem og kommer i rampelyset, mens resten har en tendens til at blive ignoreret eller endog glemt og studiet af dem foragtet.

Denne situation synes at have forekommet i vort århundrede for matematikkens filosofi som et resultat af den dynamiske udvikling af metamatematikken.

Emnet for metamatematikken er en abstraktion af matematik, hvor matematiske teorier udskiftes med formelle systemer, beviser med bestemte følger af velformede formler og definitioner med "forkortelser" som er "teoretisk undværlige", men "typografisk bekvemme".[†] Denne abstraktion fandt Hilbert på for at have en kraftig teknik til at angribe nogle af problemerne i matematikkens metodologi. Samtidig er der problemer, som falder udenfor, hvad metamatematisk abstraktion dækker. Blandt disse er alle problemerne relateret til uformel matematik og til dens vækst, og alle problemer relateret til situationel logik i matematikkens problemløsning.

Jeg vil kalde den skole i den matematiske filosofi, som stræber efter at identificere matematik med dens formelle aksiomatiske abstraktion (og matematikkens filosofi med metamatematik), for den "formalistiske" skole. En af de klareste formuleringer af det formalistiske standpunkt er at findes hos Carnap.[†] Carnap kræver, at (a) "filosofi skal udskiftes med videnskabens logik ...", (b) "videnskabens logik er intet andet end den logiske syntaks af videnskabens sprog ...", (c) "metamatematik er syntaksen af matematikkens sprog". Eller: matematikkens filosofi skal udskiftes med metamatematik.

Formalismen adskiller matematikkens historie fra matematikkens filosofi, da der, ifølge det formalistiske matematikbegreb, ingen ordentlig matematikhistorie er. Enhver formalist vil basalt set være enig i RUSSELLS "romantiske" men alvorligt mente bemærkning om, at BOOLES *Law of Thought* (1854) var "den første bog, der blev skrevet om matematik".[†] Formalismen fjerner betegnelsen matematik fra det meste af det, som almindeligvis forstås som matematik, og den kan intet sige om matematikkens vækst. Ingen af de "kreative" perioder og knap nok nogen af de "kritiske" perioder for matematiske teorier tillades adgang til formalismens himmel, hvor matematiske teorier dvæler som engle, renset for alle urenheder fra den jordiske usikkerhed. Formalister lader dog sædvanligvis en lille bagdør stå åben for faldne engle: hvis det viser sig, at vi for nogle "blandinger af matematik og noget andet" kan finde formelle systemer, "som indeholder dem i en bestemt forstand", så vil de også få adgang.[†] Med sådanne begreber måtte NEWTON vente i fire århundreder før PEANO, RUSSELL og QUINE hjalp ham ind i himlen, da de formaliserede differentialregningen. DIRAC var mere heldig: SCHWARTZ reddede hans sjæl i hans levetid. Måske skulle vi her nævne metamatematikkerens paradoksale stilling: ifølge formalistisk, ja selv deduktivistisk, standard er han ikke en ærlig

matematiker. DIEUDONNÉ taler om “den absolutte nødvendighed, der er påtvunget enhver matematiker, som bekymrer sig om intellektuel helhed” (min fremhævnings), af at præsentere sine begrundelser i aksiomatisk form.[†]

Under den nuværende dominans af formalismen er man fristet til at omskrive KANT: matematikkens historie, i mangel af filosofiens ledelse, er blevet *blind*, mens matematikkens filosofi, som vender ryggen til de mest interessante fænomener i matematikkens historie, er blevet *tom*.

“Formalisme” er et værn mod de logiske positivisters filosofi. Ifølge de logiske positivister er et udsagn kun meningsfuldt, hvis det enten er en “tautologi” eller empirisk. Da uformel matematik hverken er “tautologisk” eller empirisk, må den være meningsløs, ren vrøvl.[†] De logiske positivisters dogmer har været skadelige for *matematikkens historie og filosofi*.

Formålet med dette essay er at angribe nogle problemer i *den matematiske metodologi*. Jeg bruger ordet “metodologi” i en betydning, der er beslægtet med PÓLYAS og BERNAYS’ “heuristik”[†] og POPPERS “opdagelses logik” eller “situationel logik”.[†] Den nylige afståelse af begrebet “matematikkens metodologi” til at være et synonym for “mematmatematik” har uden tvivl været påvirket af formalisterne. Det antyder, at i formalismens matematikfilosofi er der ikke rigtig plads til metodologi i form af opdagelses logik.[†] Ifølge formalister er matematik identisk med formaliseret matematik. Men hvad kan man *opdage* i en formaliseret teori? To ting. For det *første* kan man opdage løsningen til problemer, som en passende programmeret Turing maskine kan løse i endelig tid (som f.eks.: er et bestemt påstået bevis et bevis eller ej?). Ingen matematikere er interesseret i at gennemgå den kedelige mekaniske “metode” krævet af sådanne beslutningsprocedurer. For det *andet* kan man opdage løsninger til problemer, hvor man kan blive ledt af “metoden med disciplineret indsigt og god skæbne”.

Dette trøstesløse valg mellem en maskines rationalisme og irrationalismen i blindt gætteri holder ikke for levende matematik.[†] en undersøgelse af *uformel* matematik vil afgive en rig situationel logik for arbejdende matematikere, en situationel matematik som hverken er mekanisk eller irrational, men ikke kan anses for — og endnu mindre er — stimuleret af formalismens filosofi.

Matematikkens historie og logikken i matematiske opdagelser, dvs. den matematiske tankes fylogene (læren om en arts udvikling gennem tiderne) og ontogenese (læren om et individs udvikling fra æg til voksen stadium),[†] kan ikke udvikles uden kritikken og en ultimativ forkastelse af formalismen.

Men den formalistiske matematikfilosofi har meget dybe rødder. Det er det sidste led i en lang kæde af *dogmatiske* matematikfilosofier. For mere end 2000 år siden var der en diskussion mellem *dogmatikere* og *skeptikere*. Dogmatikerne holder på, at vi, ved hjælp af vort menneskelige intellekt og/eller sansers evner, kan opnå sandhed og vide, at vi har opnået det. Skeptikerne påstår på den anden side, at enten kan vi ikke opnå sandheden overhovedet (medmindre vi får hjælp af mystiske erfaringer), eller også kan vi ikke vide, om vi kan opnå den, eller at vi har opnået den. I denne store debat, hvori argumenterne nu og da bliver revideret, har matematikken været dogmatikkens stolte fæstning. Uanset hvornår den matematiske dogmatik af idag kommer i en “krise”, så fremkommer endnu en gang en ny version af ægte stringens og et endeligt grundlag, hvorved billedet af en autoritative, ufejlbarlige, ugendrivelige matematik genetableres. “Den eneste Videnskab, som Gud hidtil har skænket menneskeheden”.[†] De fleste skeptikere trækker sig tilbage fra den dogmatiske epistemologis uindtagelige fæstning. En udfordring burde forlængst være kommet.

Kernen i dette værk vil udfordre den matematiske formalisme, men vil ikke direkte udfordre

den matematiske dogmatiks grunlæggende standpunkter. Dets beskedne mål er at uddybe det synspunkt, at uformel, kvasi-empirisk matematik ikke vokser ved en monoton forøgelse af antallet af ubetvivlelig anerkendte sætninger, men gennem den uafladelige forbedring ved spekulativ gættei og kritik, gennem logikken i beviser og gendrivelses. Men da metamatematik er et paradigme for uformel, kvasi-empirisk matematik, som er i kraftig vækst for tiden, vil værket derved også være en udfordring til den moderne matematiske dogmatik. Den, der studerer metamatikkens nyere historie, vil genkende mønstret beskrevet her på sit eget felt.

Dialogformen skulle afspejle det dialektiske i historien. Det var meningen, at den skulle indeholde en slags *rational reconstruction* eller "*distilleret*" historie. Den *virkelige* historie vil falde ind i noterne, som for de flestes vedkommende derfor skal tages som en organisk del af værket.

Kapitel 1

Et problem og en formodning

Man skal forestille sig, at samtalen finder sted i et klasseværelse. Klassen bliver interesseret i et *PROBLEM*: Er der en relation mellem antallet af hjørner V , antallet af kanter E og antallet af sider F i et polyeder — specielt i *regulære polyedre* — analog til den trivielle relation mellem antallet af hjørner og kanter i *polygoner*, nemlig at der er lige så mange kanter som hjørner: $V = E$? Denne sidstnævnte relation tillader os at klassificere polygoner efter antallet af kanter (eller hjørner): trekanter, firkanter, femkanter osv. En analog relation vil hjælpe os til at klassificere polyedre.

Efter mange forslag og forsøg finder klassen ud af, at for alle regulære polyedre gælder: $V - E + F = 2$.[†] Nogle gætter på, at dette gælder for ethvert polyeder. Andre prøver at falsificere *formodningen* og forsøger at afprøve den på mange forskellige måder. Den holder godt. Resultatet *underbygger* formodningen og giver en forventning om, at den kan *bevises*. Det er på dette tidspunkt efter formuleringen af problemet og formodningen, at vi kommer ind i klasseværelset.[†] Lærere skal til at give et bevis.

Kapitel 2

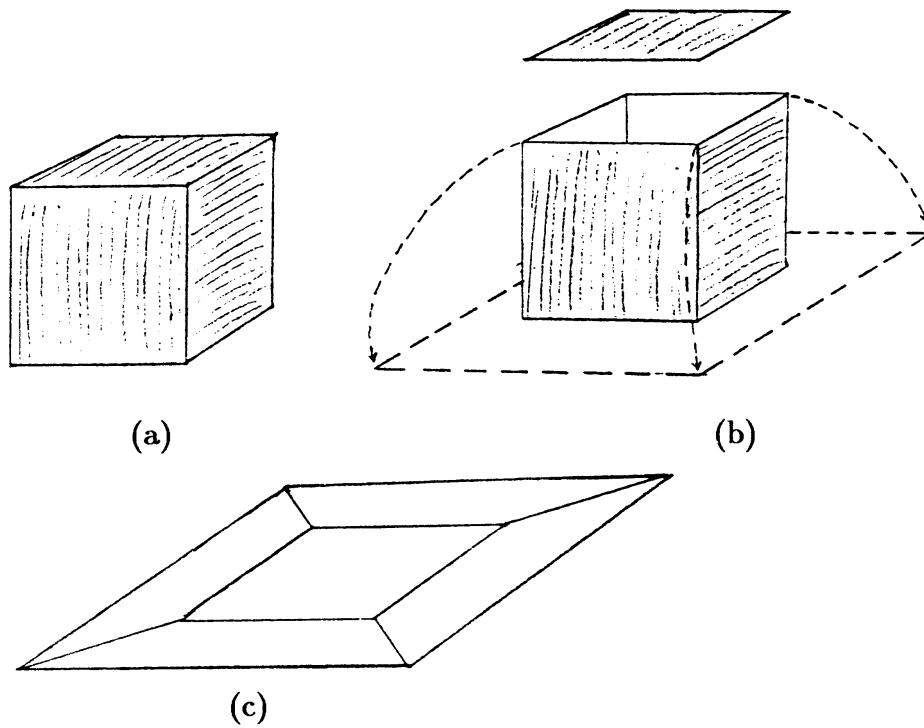
Et bevis

LÆREREN: I sidste time endte vi med en formodning om, at for alle polyedre gælder $V - E + F = 2$, hvor V er antallet af hjørner, E antallet af kanter og F antallet af sider. Vi fik afprøvet den med forskellige metoder, men vi har endnu ikke bevist den. Har nogen fundet et bevis?

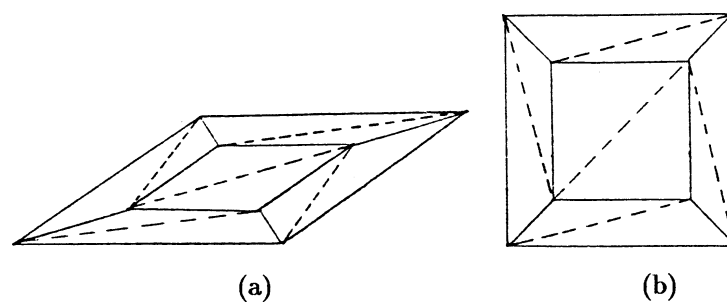
SIGMA: "Jeg må indrømme, at jeg endnu ikke har været i stand til at give et stringent bevis for sætningen Men eftersom sandheden af den er blevet kontrolleret i så mange tilfælde, kan der ikke være nogen tvivl om, at sætningen gælder for alle polyedre. Så sætningen ser ud til at være tilfredsstillende bevist."[†] Har du imidlertid et bevis, så lad os bare se det.

LÆREREN: Jeg har et. Det består af det følgende tankeeksperiment.

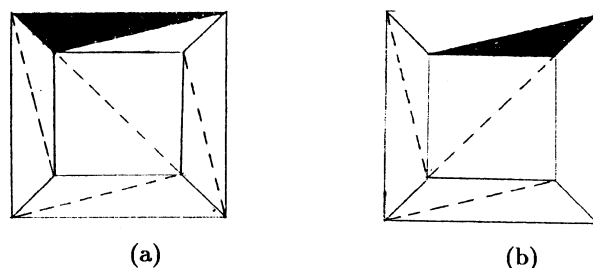
1. Lad os forestille os, at polyedret er hult med en overflade af tynd gummi. Hvis vi skærer en side ud, kan vi flade den tilbageværende overflade ud på en tavle uden at ødelægge den. Siderne og kanterne vil blive deformerede, kanterne kan blive krumme, men V og E vil ikke blive ændret, så hvis $V - E + F = 2$ for det oprindelige polyeder, så vil $V - E + F = 1$ for det flade netværk. Husk, at vi har fjernet en side (*figur 2.1 viser det flade netværk i det tilfælde, hvor polyederet er en terning*).
2. Nu triangulerer vi vort kort; det ligner jo faktisk et geografisk kort. Vi tegner (muligvis krumme) diagonaler i de (muligvis krummede) polygoner, som ikke allerede er (muligvis krummede) trekanter. Hver gang vi tegner en diagonal forøges både E og F med 1, så værdien af $V - E + F$ er uændret.
3. Fra netværket af trekanter fjerner vi nu trekanterne en ad gangen. Når vi fjerner en trekant, fjerner vi enten én kant, hvorved en side og en kant forsvinder (*figur 2.3(a)*), eller vi fjerner to kanter og ét hjørne, hvorved en side, to kanter og et hjørne forsvinder (*figur 2.3(b)*). Så hvis $V - E + F = 1$ før trekanten bliver fjernet, så har det også denne værdi efter trekanten er fjernet. Til slut har vi én enkelt trekant. For den gælder $V - E + F = 1$ klart. Dermed har vi bevist vores formodning.[†]



Figur 2.1: Bevisets første skridt udført på en terning



Figur 2.2: Trianguleringen af netværket fra terningen



Figur 2.3: De to måder, hvorpå man kan fjerne trekanter fra netværket

DELTA: Du burde nu kalde det en *sætning*. Det er ikke længere noget vi formoder.[†]

ALFA: Det ved jeg nu ikke rigtigt. Jeg kan godt se, at dette eksperiment kan udføres på en terning eller et tetraeder, men hvorfra kan jeg vide, at det kan udføres på ethvert polyeder? Er du f.eks. sikker på, hr. lærer, at *ethvert polyeder, efter en side er fjernet, kan flades ud på en tavle*? Jeg har min tvivl om dette første skridt.

BETA: Er du sikker på, at *når kortet trianguleres så vil man altid få en ny side for hver ny kant*? Jeg har min tvivl om dit andet skridt.

GAMMA: Er du sikker på, at *der kun er to alternativer: at der enten forsvinder en kant eller der forsvinder to kanter og et hjørne, når man fjerner trekanterne en efter en*? Er du helt sikker på, at *processen altid slutter med én enkelt trekant*? Jeg har min tvivl om dit tredje skridt.[†]

LÆREREN: Selvfølgelig er jeg ikke sikker.

ALFA: Men så er vi værre stillet end før! I stedet for en formodning har vi nu mindst tre! Og det kalder du et "bevis"!

LÆREREN: Jeg indrømmer, at den traditionelle betegnelse "bevis" for dette tankeeksperiment måske kan betragtes som en smule misvisende. Jeg mener ikke med "bevis", at det sikrer sandheden af formodningen.

DELTA: Hvad gør det så? Hvad mener du et matematisk bevis beviser?

LÆREREN: Det er et skarpsindigt spørgsmål, som vi skal prøve at besvare senere. Indtil da foreslår

jeg, at vi beholder den traditionelle tekniske betegnelse "bevis" for *et tankeeksperiment* — eller "*kvasi-eksperiment*" — som opløser den oprindelige formodning i *delformodninger* eller *lemmaer*, og derved indlejrer det i et muligvis fjernt område af viden. Vort "bevis" har for eksempel anbragt den oprindelige formodning, om krystaller eller faste legemer om I vil, i teorien om gummiflader. DESCARTES og EULER, som fremsatte den oprindelige formodning, drømte ikke en gang om dette.[†]

Kapitel 3

Kritik af beviset ved modeksemples, som er lokale men ikke globale

LÆREREN: Den opdeling af formodningen, som beviset giver, åbner nye muligheder for afestning. Opdelingen af formodningen giver en bredere front for vores kritik, som derved får flere mål. Vi har nu mindst tre muligheder for modeksemples i stedet for én!

GAMMA: Jeg har allerede udtrykt min tvivl om dit tredje lemma (hvor du antog, at når man fjerner trekanter fra det netværk, som var resultatet af udfladningen og trianguleringen, havde vi kun to muligheder: enten at fjerne en kant eller at fjerne to kanter og et hjørne). Jeg har en mistanke om, at andre mønstre kan dukke op, når man fjerner trekanterne.

LÆREREN: Mistanke er ikke kritik.

GAMMA: Er et *modeksempel* så kritik?

LÆREREN: Bestemt ja. Formodninger ignorerer uvilje og mistænksomhed, men de kan ikke ignorere modeksemples.

THETA (lavmælt): Formodninger er tydeligvis meget forskellige fra dem, der fremsætter dem.

GAMMA: Jeg foreslår et trivielt modeksempel. Tag det triangulerede netværk, som fremkommer ved at udføre de to første skridt på en terning. Hvis jeg nu fjerner en trekant fra det *indre* af netværket, ligesom en brik i et puslespil, så fjerner jeg en trekant uden at fjerne en eneste kant eller hjørne. Så det tredje lemma er falsk og ikke kun i tilfældet med terningen, men for alle polyedre undtagen

tetraederet, hvis flade netværk kun indeholder randtrekanter. Dit bevis beviser således kun Eulers sætning for tetraederet. Men vi vidste jo allerede på forhånd, at $V - E + F = 2$ for tetraederet, så hvorfor bevise det?

LÆREREN: Du har ret. Men bemærk, at selv om terningen er et modeksempel til det tredje lemma, så er det ikke et modeksempel til formodningen, idet der gælder $V - E + F = 2$ for terningen. Du har vist svagheden i argumentet, dvs. beviset, men ikke falsificeret formodningen.

ALFA: Vil du nu kassere dit bevis?

LÆREREN: Nej. Kritik betyder ikke nødvendigvis destruktion. Jeg vil forbedre mit bevis, så det kan modstå kritikken.

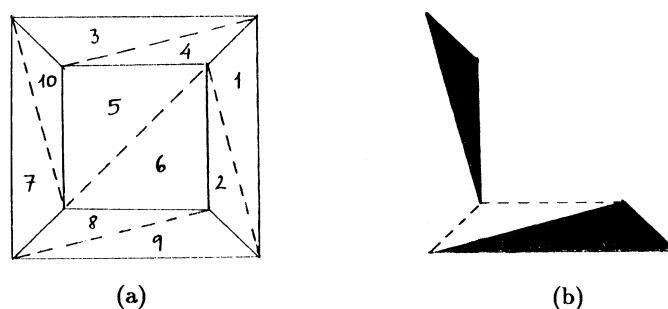
GAMMA: Hvordan?

LÆREREN: Før jeg viser det, vil jeg indføre noget terminologi. Jeg vil kalde et modeksempel, der gendriver et lemma (uden nødvendigvis at gendrive formodningen) for et *lokalt modeksempel*, hvorimod et modeksempel, som gendriver formodningen kaldes et *globalt modeksempel*. Så dit modeksempel er lokalt, men ikke globalt. Et lokalt modeksempel er en kritik af beviset, men ikke af formodningen.

GAMMA: Så formodningen kan være sand, uden at dit bevis beviser det.

LÆREREN: Men jeg kan let uddybe og *forbedre beviset* ved at erstatte det falske lemma med en lidt ændret udgave, som dit modeksempel ikke vil gendrive. Jeg vil ikke længere hævde, at når man fjerner *en tilfældig trekant*, så følger man *et af de to nævnte mønstre*, men blot at *i ethvert trin under processen, hvor man fjerner randtrekanter følges mønstret*. Går vi tilbage til mit tankeeksperiment skal jeg nu blot indsætte et enkelt ord i mit tredje skridt, så det lyder: "fra det triangulerede netværk fjerner vi nu randtrekanter en ad gangen". Du vil formentlig være enig i, at man kun skal gøre en ubetydelig observation for at gøre beviset korrekt.[†]

GAMMA: Jeg mener ikke din observation var så ubetydelig. I virkeligheden var den ganske snedig. For at gøre det klart vil jeg vise, at den er falsk! Tag det flade netværk fra terningen igen og fjern 8 af de 10 trekanter i den orden jeg giver her (figur 3.1). Da vi fjernede den ottende trekant, som klart var en rand trekant, fjernede vi to kanter og ingen hjørner. Dette ændrer $V - E + F$ med 1. Og tilbage har vi de to usammenhængende trekanter nummer 9 og 10!



Figur 3.1: Gammas rækkefølge

LÆREREN: Okay, jeg må redde ansigt og sige, at jeg med en randtrekant mente en trekant, som ikke gør netværket usammenhængende, når den fjernes. Men min intellektuelle ærlighed hindrer mig i bag jeres ryg at ændre min udtalelse ved at påstå, at: "Jeg mente ...", så jeg indrømmer åbent, at jeg nu må *udskifte* den anden version af operationen, der fjernede trekantede, men en tredje version: at vi fjerner trekantede én ad gangen på en sådan måde at $V - E + F$ ikke ændres.

KAPPA: Jeg er generøs nok til at kunne gå med til, at lemmaet svarende til denne operation, er sandt, nemlig at hvis vi fjerner trekantede en efter en således at $V - E + F$ ikke ændres, ja så ændres $V - E + F$ ikke!

LÆREREN: Nej! Lemmaet er, at *trekantede i vort netværk kan nummereres således, at fjernes de i denne rækkefølge vil udtrykket $V - E + F$ ikke ændres før vi når den sidste trekant.*

KAPPA: Men hvordan skulle man overhovedet kunne konstruere denne rigtige rækkefølge, hvis den da overhovedet eksisterer?[†] Dit oprindelige tankeeksperiment gav vejledningen: fjern trekantede i en eller anden orden. Du ændrede tankeeksperimentet og gav vejledningen: fjern randtrekantede i en eller anden orden. Nu siger du, at vi skal følge en bestemt orden, men du siger ikke hvilken og om denne orden overhovedet eksisterer. Så tankeeksperimentet bryder sammen. Du forbedrede din bevisanalyse, dvs. din samling af lemmaer, men tankeeksperimentet, som du kaldte "bevist", forsvandt.

RHO: Kun det tredje skridt forsvandt.

KAPPA: Desuden: *forbedrede* du lemmaet? Dine første to simple versioner så i det mindste ud til at være trivielt sande, før de blev gendrevet. Din længere, sammenflikkede version ser ikke engang plausibel ud. Tror du virkelig, at den vil undgå gendrivelse?

LÆREREN: "Plausible" og selv "trivielt sande" sætninger gendrives sædvanligvis hurtigt; sofistikerede, usandsynlige formodninger modnet af kritik kan ramme sandheden.

OMEGA: Og hvad sker der, hvis selv dine "sofistikerede formodninger" falsificeres, og hvis du ikke denne gang kan erstatte dem med nogle, der ikke er falsificerede? Eller, hvis det *ikke* lykkes dig at forbedre argumentet yderligere ved at lappe sammen på det lokalt? Det lykkedes dig at komme udenom et lokalt modeksempel, som ikke var globalt ved at udskifte det gendrevne lemma. Hvad hvis det ikke lykkes dig næste gang?

LÆREREN: Godt spørgsmål. Det vil blive sat på dagsordenen til i morgen.

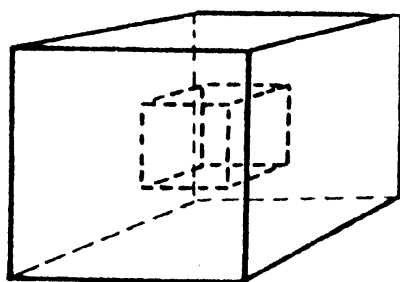
Kapitel 4

Kritik af formodningen med globale modeksemppler

ALFA: Jeg har et modeksempel, som vil falsificere dit første lemma, men det vil også være et modeksempel til formodningen, dvs. det er også et globalt modeksempel.

LÆREREN: Virkelig! Interessant. Lad os se det.

ALFA: Forestil dig et legeme begrænset af et par terninger inden i hinanden (*figur 4.1*), dvs. et par terninger, hvor den ene er indersiden, uden at den rører den anden. Denne hule terning falsificerer dit første lemma, fordi man ikke kan flade den ud, når man fjerner en side fra den inderste terning. Det vil iøvrigt heller ikke hjælpe at fjerne en side fra den yderste terning. Desuden gælder for hver af terningerne: $V - E + F = 2$, således at der for den hule terning gælder: $V - E + F = 4$.



Figur 4.1: Den hule terning

LÆREREN: Godt fundet på. Lad os kalde det *modeksempel 1*.[†] Hvad så nu?

4.1 Forkastelse af formodningen. Overgivelsesmetoden

GAMMA: Hr. lærer, din indstilling forbløffer mig. Et enkelt modeksempel gendriver en formodning lige så effektivt som 10. Formodningen og dens bevis har ramt fuldstændig ved siden af. Hænderne op! Du må overgive dig. Forlad den falske formodning, glem alt om den og prøv nye veje.

LÆREREN: Jeg er enig med dig i, at *formodningen* har fået en hård medfart af Alfas modeksempel. Men det er ikke rigtigt, at *beviset* har ramt fuldstændig ved siden af. Hvis du for øjeblikket er enig med mig i min tidligere definition af ordet "bevis" som "et tankeeksperiment, der leder til en opdeling af den oprindelige formodning i lemmaer" i stedet for at bruge det i meningen "garanti for sikker sandhed", så behøver du ikke drage den konklusion. Mit bevis beviser bestemt Eulers formodning i den første mening, men ikke nødvendigvis i den anden mening. Du er kun interesseret i beviser som "beviser", hvad man forventer, de skulle bevise. Jeg er interesseret i beviser, selvom de ikke når det forventede mål. COLUMBUS nåede ikke Indien, men han opdagede noget ganske interessant.

ALFA: Så ifølge din filosofi er et lokalt modeksempel (hvis det ikke er globalt samtidigt) en kritik af beviset, men ikke af formodningen, hvorimod et globalt modeksempel er en kritik af formodningen, men ikke nødvendigvis af beviset. Du er enig i at opgive formodningen, men du forsvarer beviset. Men hvis formodningen er falsk, hvad i himlens navn beviser beviset så?

GAMMA: Din analogi med COLUMBUS duer ikke. Accepterer man et globalt modeksempel, må man overgive sig betingelsesløst.

4.2 Forkastelse af modeksempel. Metoden at udelukke misfostre

DELTA: Men hvorfor acceptere modeksempel? Vi beviste vores formodning, så nu er den en sætning. Jeg indrømmer, at den støder ind i dette såkaldte "modeksempel". En af de to må vige. Men hvorfor skal sætningen vige, når den er blevet bevist? Det er "kritikken", som må træde til side. Det er forfalsket kritik. Dette par af terninger indeni hinanden er overhovedet ikke et polyeder. Det er et *misfoster*, et patologisk tilfælde og ikke et modeksempel.

GAMMA: Hvorfor ikke? *Et polyeder er et legeme, hvis overflade består af polygonale flader.* Og modeksempel er et legeme begrænset af polygonale flader!

LÆREREN: Lad os kalde denne definition for *definition 1*.[†]

DELTA: Din definition er ukorrekt. Et polyeder må være en flade. Det har sider, kanter og hjørner, det kan deformeres, flades ud på en tavle og har intet at gøre med begrebet "legeme". *Et polyeder er en flade, der består af et system af polygoner.*

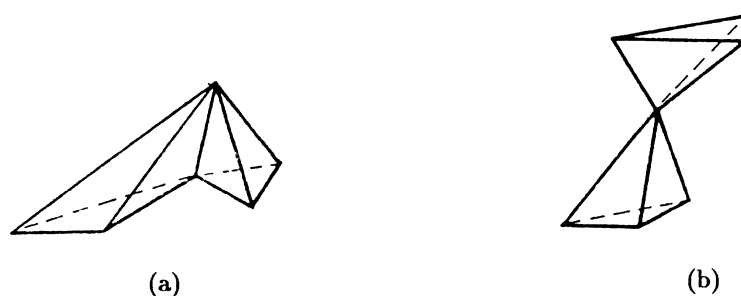
LÆREREN: Som vi kalder *definition 2*.[†]

DELTA: Så i virkeligheden viste du os *to polyedre, to flader*, hvor den ene var fuldstændig indeni den anden. En gravid kvinde er ikke et modeksempel til sætningen, at ethvert menneske har ét hoved.

ALFA: Jaså! Mit modeksempel har altså skabt et nyt polyederbegreb. Eller tør du påstå, at med et polyeder har du *altid* ment en flade?

LÆREREN: Lad os for øjeblikket acceptere Deltas *definition 2*. Kan du gendrive vores formodning nu, hvis vi med et polyeder mener en flade?

ALFA: Selvfølgelig. Tag to tetraedre, som har en kant fælles (*figur 4.2(a)*). Eller tag to tetraedre, som har et hjørne fælles (*figur 4.2(b)*). Begge disse tvillinger er sammenhængende og de består begge af en enkelt flade. Og du kan kontrollere, at $V - E + F = 3$ for dem begge.



Figur 4.2: Tvillingetetraedre

LÆREREN: *Modeksempler 2a og 2b*.[†]

DELTA: Jeg beundrer dig din forvrængede forestillingsevne, men jeg mente selvfølgelig ikke, at ethvert system af polygoner er et polyeder. Ved et polyeder mente jeg *et system af polygoner arrangeret på en sådan måde, at (1) præcis to polygoner mødes langs enhver kant og (2) det er muligt at komme fra indersiden af enhver polygon til indersiden af enhver anden polygon langs en vej, som aldrig krydser en kant i et hjørne*. Din første tvilling udelukkes af det første kriterium i min definition, og din anden tvilling

udelukkes af det andet kriterium.

LÆREREN: *Definition 3.*[†]

ALFA: Jeg beundrer din snedighed med at indføre den ene definition efter den anden som barrikader mod falsifikationerne dine højtelskede ideer. Hvorfor definerer du ikke bare et polyeder som et system af polygoner, der tilfredsstillende $V - E + F = 2$? Denne perfekte definition ...

KAPPA: *Definition P.*[†]

ALFA: ...ville sætte striden til vægs for altid. Der ville ikke være noget behov for at undersøge emnet mere.

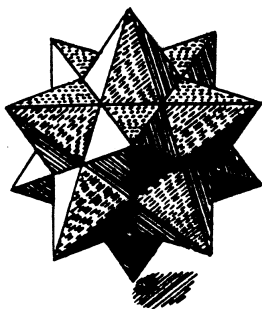
DELTA: Men der findes ikke nogen sætning i verden, som ikke ville kunne falsificeres med misfore.

LÆREREN: Jeg er ked af at afbryde jer. Som vi har set, afhænger gendrivelse ved modeksempler af definitionen af de indgående begreber. Hvis et modeksempel skal være en objektiv kritik, må vi være enige om begreberne. Vi *må* opbygge en sådan enighed ved at definere begreberne, der hvor kommunikationen bryder sammen. Jeg definerede f.eks. ikke hvad et "polyeder" var. Jeg antog, at I var fortrolige med begrebet, dvs. at I havde evnen til at kunne skelne ting, som er polyedre, fra ting, som ikke er polyedre. Det viste sig, at omfanget af begrebet overhovedet ikke var oplagt: *definitioner fremsættes og diskuteres ofte, når modeksempler dukker op*. Jeg foreslår, at vi nu sammen betragter de rivaliserende definitioner, og at vi indtil videre undlader at diskutere de forskelle i resultater, som følger af de forskellige definitioner. Kan nogen komme i tanke om noget, som selv den mest restriktive definition vil tillade som et ægte modeksempel?

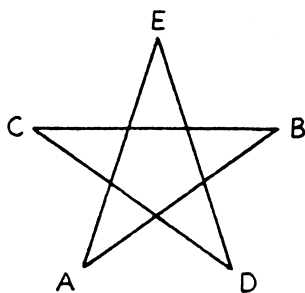
KAPPA: Inklusive *definition P*?

LÆREREN: Eksklusiv *definition P*.

GAMMA: Jeg kan. Kig på dette *modeksempel 3*: et stjernepolyeder. Jeg vil kalde det et *pindsvin* (*figur 4.3*). Det består af 12 stjerneformede femkanter (*figur 4.4*). Det har 12 hjørner, 30 kanter og 12 stjerneformede femkanter som sider. Man kan kontrollere det ved at tælle. Altså er Descartes-Euler sætningen overhovedet ikke sand, idet der gælder: $V - E + F = -6$.[†]



Figur 4.3: Keplers stjernepolyeder, hvor hver side er skraveret på forskellige måde for at vise, hvilke trekanter, der hører til samme femkantede side



Figur 4.4: Den stjerneformede femkant

DELTA: Hvorfor tror du, at dit "pindsvin" er et polyeder?

GAMMA: Kan du ikke se det? Det er et polyeder, hvis sider er de 12 stjerneformede femkanter. Det tilfredsstillende din sidste definition: det er "et system af polygoner arrangeret på en sådan måde, at (1) præcis to polygoner mødes langs enhver kant, og (2) det er muligt at komme fra enhver polygon til enhver anden polygon uden at krydse et hjørne i polyederet".

DELTA: Men så ved du ikke engang, hvad en polygon er! En stjerneformet femkant er naturligvis ikke en polygon! *En polygon er et system af kanter arrangeret på en sådan måde, at (1) præcis to kanter mødes i ethvert hjørne, og (2) kanterne har ingen fælles punkter undtagen hjørnerne.*

LÆREREN: Lad os kalde dette *definition 4*.

GAMMA: Jeg kan ikke se, hvorfor du medtager den anden betingelse. Den korrekte definition af en polygon burde kun indeholde den første betingelse.

LÆREREN: *Definition 4'*.

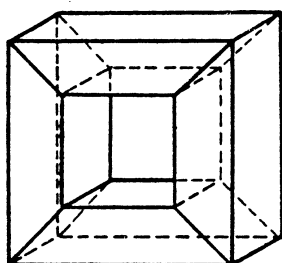
GAMMA: Den anden betingelse har intet at gøre med en polygones væsen. Se, hvis jeg nu løfter en side en lille smule, så er den stjerneformede femkant allerede en polygon selv i din forstand. Du forestiller dig en polygon tegnet med kridt på en tavle, men du skal forestille dig den som en struktur af træ. Så er det klart, at hvad du tror er et fælles punkt, i virkeligheden ikke er et punkt, men to punkter, hvor det ene ligger oveni det andet. Du bliver ført af gale veje ved at lægge polygonen i et plan. Du skal lade dens kanter gå ud i rummet.[†]

DELTA: Kan du fortælle mig, hvad *arealet* af en stjerneformet femkant er? Eller vil du påstå, at nogle polygoner ikke har et areal?

GAMMA: Var det ikke dig selv, som sagde, at polyeder intet har at gøre med ideen om et legeme? Hvorfor foreslår du så nu, at polygoner skulle være knyttet til ideen om et areal? Vi blev enige om, at et polyeder er en lukket flade med kanter og hjørner, så hvorfor kan vi ikke blive enige om, at en polygon simpelthen er en lukket kurve med hjørner? Men hvis du fastholder din idé er jeg villig til at definere arealet af den stjerneformede femkant.[†]

LÆREREN: Lad os forlade denne diskussion et øjeblik og gå frem som før. Betragt de sidste to definitioner sammen: *definition 4* og *definition 4'*. Kan nogen give et modeksempel til vores formodning, som kan gå ind under *begge* definitioner af en polygon?

ALFA: Her er et. Betragt en *billedramme* (figur 4.5). Det er et polyeder ifølge enhver af de hidtil fremsatte definitioner. Alligevel finder man ved at tælle hjørner, kanter og sider, at der gælder følgende: $V - E + F = 0$.



Figur 4.5: Billedrammen

LÆREREN: *Modeksempel 4.*[†]

BETA: Og det blev så enden på din formodning. Det var en skam, da formodningen holdt så godt i så mange tilfælde. Men det ser ud til, at vi bare har spildt vor tid.

ALFA: Delta, jeg er forbløffet. Du siger intet? Kan du ikke definere dette nye modeksempel bort? Jeg troede overhovedet ikke, der var en eneste hypotese i verden, som du ikke kunne redde fra falsifikation ved ordkløveri. Giver du op nu? Er vi til sidst enige om, at der findes ikke-Eulerske polyedre? Utroligt!

DELTA: Du burde virkelig finde et mere passende navn for dine ikke-Eulerske pestillenser og ikke vildlede os til at kalde dem "polyedre". Men jeg er efterhånden ved at miste interessen for din misfostre. Jeg vender mig bort i væmmelse fra dine ynkelige "polyedre", hvor Eulers smukke sætning ikke gælder.[†] Jeg søger efter orden og harmoni i matematikken, men du skaber kun anarki og kaos.[†] Vore holdninger er uforenelige.

ALFA: Du er virkelig stokkonservativ! Du bebrejder de ondskabsfulde anarkister for at ødelægge din "orden" og "harmon" og du "løser" vanskelighederne ved nye forslag til formuleringer.

LÆREREN: Lad os høre den nyeste flugt-definition.

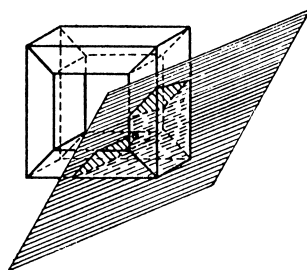
ALFA: Du mener det nyeste sproglige trick, den nyeste indskrænkning af begrebet "polyeder"! Delta

opløser de virkelige problemer i stedet for at løse dem.

DELTA: Jeg *indskrænker* ikke begrebet. Det er dig, som udvider det. For eksempel er billedrammen overhovedet ikke noget ægte polyeder.

ALFA: Hvorfor ikke?

DELTA: Tag et vilkårligt punkt i "tunnelen", dvs. rummet begrænset af rammen. Læg et plan gennem dette punkt. Du vil så finde, at ethvert sådant plan altid giver *to* forskellige tværsnit af billedrammen, som bliver to forskellige, fuldstændig usammenhængende polygoner! (figur 4.6).



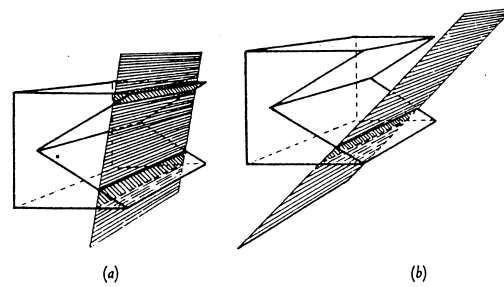
Figur 4.6: Tværsnit i billedrammen

ALFA: Og hvad så?

DELTA: Et ægte polyeder opfylder, at gennem ethvert punkt i rummet vil der altid være mindst et plan, som giver et tværsnit af polyederet, som er én enkelt polygon. I tilfældet med konvekse polyedre vil alle planer opfylde denne betingelse uanset hvor punktet ligger. For ordinære konkave polyedre vil der gælde, at nogle punkter har planer med flere tværsnit, men der vil altid være et, som kun har ét (figur 4.7(a) og (b)). I situationen med denne billedramme: hvis vi vælger et punkt i tunnelen, så vil alle planer derigennem give to tværsnit. Hvordan kan du så kalde det et polyeder?

LÆREREN: Dette ligner en ny definition, denne gang en implicit. Lad os kalde den *definition 5*.[†]

ALFA: En følge af modeksempler og en tilsvarende følge af definitioner, som tydeligvis ikke indeholder noget nyt, men blot er nye åbenbaringer af rigdommen i det gamle begreb, som ser ud til at have lige så mange "skjulte" betingelser, som der er modeksempler. Udsagnet: *for alle polyedre gælder $V - E + F = 2$* ser ud til at være en urørlig, gammel og "evig" sandhed. Det er underligt at tænke



Figur 4.7: Tværsnit i et *ordinært* konkavt polyeder

på, at på et tidspunkt var det et vidunderligt gæt, fuld af udfordring og spænding. På grund af din sindsyge skiften mening, er det nu blevet til en fattig konvention, et foragteligt dogme. [*Han forlader klasseværelset.*]

DELTA: Jeg forstår ikke, hvordan en intelligent mand som Alfa kan misbruge sit talent på at plage os med spørgsmål. Han synes at være meget fordybet i produktionen af misfostre. Men misfostre skaber aldrig vækst, hverken i naturens verden eller i tankernes verden. Udvikling følger altid et harmonisk og ordnet mønster.

GAMMA: Genetikere kan let gendrive den påstand. Har du ikke hørt, at mutationer som producerer misfostre spiller en betydelig rolle i makroevolutionen? De kalder sådanne abnorme mutanter for "misfostre med håb". For mig ser det ud som om Alfas modeksempler, selvom de var misfostre, var "misfostre med håb".[†]

DELTA: Det er ligegyldigt nu. Alfa har opgivet den videre kamp. Ikke flere misfostre nu.

GAMMA: Jeg har et nyt eksemplar. Det imødekommer alle restriktionerne i *definition 1, 2, 3, 4 og 5*, men $V - E + F = 1$. Dette *modeksempl 5* er en simpel cylinder. Den har 3 sider (toppen, bunden og den krumme flade), 2 kanter (to cirkler) og ingen hjørner. Det er et polyeder ifølge din definition: (1) præcis to polygoner mødes langs hver kant, og (2) det er muligt at komme fra indersiden af enhver polygon til indersiden af enhver anden polygon langs en rute, som aldrig krydser en kant i et hjørne. Og du må acceptere siderne som ægte polygoner, eftersom de tilfredsstiller dine betingelser: (1) præcis to kanter mødes i ethvert hjørne og (2) kanterne har ingen fælles punkter udover hjørnerne.

DELTA: Alfa udvidede begreberne, men du flår i dem! Dine "kanter" er ikke kanter. *En kant har to hjørner!*

LÆREREN: *Definition 6?*

GAMMA: Men hvorfor vil du udelukke betegnelsen "kant" for kanter med 1 eller muligvis 0 hjørner? Du plejer at indskrænke begreber, men nu lemlæster du dem, så næstet intet bliver tilbage!

DELTA: Men kan du ikke se det unyttige i disse såkaldte gendrivelser? "Hidtil, når et nyt polyeder blev indført, var det af praktiske grunde; nu indføres de alene for at vise fejl i vore forfædres begrundelser og man vil ikke kunne bruge dem til andet end det. Vort emne har ændret sig til et museum af misfostre, hvor anstændige, ordinære polyedre skal være lykkelige, hvis de kan beholde et meget lille hjørne".[†]

GAMMA: Jeg tror, at hvis vi ønsker at lære noget virkeligt dybt om noget, så skal vi ikke studere det i dets "normale", regulære, sædvanlige form, men i det kritiske tilstande, i feber, i lidenskab Hvis du ønsker at vide noget om det normale sunde legeme, så studér det, når det er unormalt, når det er sygt. Hvis du ønsker at vide noget om funktioner, så studér deres singulariteter. Hvis du ønsker at vide noget om ordinære polyedre, så studér de vanvittige grænseeksempler. Det er på denne måde, at man kan bringe den matematiske analyse ind i hjertet af emnet.[†] Men selv om du basalt set havde ret, kan du så ikke se det unyttige i din *ad hoc* metode? Hvis du ønsker at trække en grænselinie mellem modeksempler og misfostre, så kan du ikke gøre det skridtvis.

LÆREREN: Jeg tror, at vi må afvise Deltas strategi mod globale modeksempler, selvom vi bør ønske ham tillykke med hans dygtige udførelse heraf. Vi kunne passende kalde hans metode: *metoden at udelukke misfostre*. Ved at bruge den metode kan man udelukke ethvert modeksempel til den oprindelige formodning ved en til tider behændig, men altid *ad hoc* ny definition af et polyeder, af dets definerende begreber eller af de definerende begreber af dets definerende begreber. Vi burde behandle modeksempler med større respekt og ikke stædigt jorde dem ved at døbe dem misfostre. Deltas væsentligste fejl er måske hans dogmatiske fordom ved fortolkningen af et matematisk bevis. Han tror, at et bevis nødvendigvis beviser det, det er bestemt til at bevise. Min fortolkning af et bevis tillader *falske* formodninger at blive "bevist", dvs. at blive opløst i lemmaer. Hvis formodningen er falsk, så forventer jeg dog også, at mindst et af lemmaerne er falsk. Men opløsningen kan stadig være interessant! Jeg er ikke bange for at finde et modeksempel til den "beviste" formodning, nej, jeg er endog villig til at gå igang med at "bevise" falske formodninger!

THETA: Jeg kan ikke følge dig.

KAPPA: Han følger blot Det nye Testamente: "Prøv alt, hold fast ved det gode" (1. brev til Tessalonerne 5, 21).

4.3 Forbedring af formodningen ved undtagelsesudelukkende metoder. Skridtvis udelukkelse. Strategisk tilbagetrækning eller søgen efter sikkerhed

BETA: Hr. lærer, jeg formoder, at du vil til at forklare dine forvirrende bemærkninger, men jeg har noget, som jeg må ud med. Jeg undskylder min utålmodighed.

LÆREREN: Kør bare løs.

[Alfa kommer ind igen]

BETA: Jeg finder, at nogle af aspekterne i Deltas argumentation er skøre, men jeg er kommet til den overbevisning, at der er en sand kerne i dem. Det forekommer mig nu, at ingen formodning er generel gyldig, men kun gyldig i et bestemt begrænset område, som udelukker *undtagelserne*. Jeg er imod at man kalder disse undtagelser for misfostre eller patologiske tilfælde. En metodologisk beslutning bør afgøre om disse, i sig selv, er interessante *eksempler*, som er en separat undersøgelse værd, eller de ikke er det. Men jeg er også imod betegnelsen "modeksempel". Det sætter dem godt nok på lige fod med de understøttende eksempler, men det maler dem med krigsmaling, således at man, ligesom Gamma, går i panik, når man møder dem og fristes til at opgive smukke og geniale beviser. Nej: de er bare *undtagelser*.

SIGMA: Jeg er enig. Betegnelsen "modeksempel" har en aggressiv tone og fornærmer dem, som har givet beviserne. "Undtagelse" er den rette betegnelse. "Der er tre slags matematiske sætninger:

1. Dem, der altid er sande og hvor der ingen restriktioner eller undtagelser er, som f.eks. at summen af vinklerne i enhver plan trekant altid er lig 180° .
2. Dem, der hviler på falske principper og derfor ikke kan accepteres på nogen måde.
3. Dem, der, selvom de hviler på sande principper, alligevel tillader undtagelser og restriktioner i nogle tilfælde ..."

EPSILON: Hvad?

SIGMA: "... Man skal passe på ikke at forveksle falske sætninger og sætninger med restriktioner".[†] Som ordsproget siger: *Undtagelsen beviser reglen*.

EPSILON (til Kappa): Hvem er dette rodehoved? Han burde lære noget om logik.

KAPPA (til Epsilon): Og om ikke-euklidiske plane trekanter.

DELTA: Jeg finder det pinligt at skulle forudsige, at i denne diskussion vil Alfa og jeg formentlig være på samme side. Vi diskuterede begge på det grundlag, at en sætning enten er sand eller falsk og blev uenige om, hvorvidt specialtilfældet Eulers sætning er sand eller falsk. Men Sigma ønsker, at vi skal give plads til eksistensen af en tredje kategori af sætninger, som "i princippet er sande", men "tillader undtagelser i bestemte tilfælde". Tillader man en fredelig sameksistens af sætninger og undtagelser i matematikken betyder det kaos og forvirring.

ALFA: Enig!

ETA: Jeg ønsker ikke at blande mig i Deltas brillante argumentation, men jeg tror det kunne være på sin plads, hvis jeg kort fortalte historien om *min* intellektuelle udvikling. I min skoletid blev jeg, hvad I vil kalde en misfosterudelukker. Det var ikke som et forsvar mod Alfa-typer, men som et forsvar mod Sigma-typer. Jeg husker, at jeg engang læste i et tidsskrift om Eulers sætning: "De mest strålende matematikere har fremsat beviser for denne sætnings generelle gyldighed. Ikke desto mindre tillader den undtagelser ... det er nødvendigt at vise disse undtagelser opmærksomhed, da ikke engang alle nutidige forfattere får øje på dem".[†] Denne artikel var ikke en isoleret øvelse i diplomati. "Selvom det i geometrilærebøger og -timer bliver påpeget, at Eulers smukke sætning $V + F = E - 2$ er underlagt nogle 'restriktioner' i visse tilfælde eller at 'den ikke ser ud til at være gyldig', så lærer man ikke den virkelige grund til disse undtagelser".[†] Nu kiggede jeg på "undtagelserne" meget omhyggeligt igen og kom til konklusionen, at de ikke imødekom den sande definition af de aktuelle begreber. Så bevis og sætning kan tages til nåde og den kaotiske sameksistens af sætninger og modeksempler forsvinder.

ALFA: Sigmas kaotiske synspunkt kan bruges som en forklaring på din udelukkelse af misfostre, men ikke som en undskyldning. Hvorfor ikke eliminere kaos ved at acceptere styrken af modeksemplerne og så forkaste "sætning" og "bevis"?

ETA: Hvorfor skulle jeg forkaste beviset? Jeg kan ikke se noget galt med det. Kan du? Min udelukkelse af misfostre synes mere rationel for mig end din udelukkelse af beviser.

LÆREREN: Denne debat viser, at misfosterudelukkelse kan komme til at lyde mere sympatisk, når den stammer fra Etas dilemma. Men lad os vende tilbage til Beta og Sigma. Det var Beta, som tog modeksemplerne til nåde som undtagelser. Sigma var enig med Beta ...

BETA: Jeg er glad for, at Sigma er enig med mig, men jeg er bange for, at jeg ikke er enig med ham. Der er bestemt tre typer af sætninger: sande, håbløst falske og håbefuldt sande. Den sidste type kan

forbedres til sande sætninger ved at tilføje passende betingelser, som udelukker undtagelserne. Jeg har "aldrig tilskrevet formler et ubegrænset gyldighedsområde. I virkeligheden er de fleste formler kun sande, hvis bestemte betingelser er opfyldte. Ved at undersøge betingelserne og, naturligvis, præcisere betydningen af de begreber, der indgår, kan jeg få alle usikkerheder til at forsvinde".[†] Så, som du ser, så forsvare jeg ikke nogen form for fredelig sameksistens mellem ubeviste formler og undtagelser. Jeg forbedrer mine formler og ændrer dem derved til *perfekte* eksemplarer, som af Sigmas første slags. Det betyder, at jeg *accepterer* misfosterudelukkelsesmetoden, når den bruges til *at finde det definitionsområde, hvor den oprindelige formodning er sand*, men jeg *afviser* brugen af den som et sprogligt trick til at redde "smukke" sætninger ved restriktive begreber. Disse to egenskaber af Deltas metode bør man holde adskilt. Jeg vil hermed døbe *min egen* metode, som er karakteriseret alene ved den første af de to egenskaber: *metoden, der udelukker undtagelser*. Jeg vil bruge den til præcist at bestemme det definitionsområde, hvori Eulers formodning gælder.

LÆREREN: Hvad er det "præcist bestemte definitionsområde" for Eulerske polyedre, som du lovede at give? Hvad er din "perfekte formel"?

BETA: *For alle polyedre, som ikke har huler (som i tilfældet med den hule terning) eller tunneler (som billedrammen), gælder der: $V - E + F = 2$.*

LÆREREN: Er du sikker?

BETA: Ja, jeg er sikker.

LÆREREN: Hvad med tvillingetetraederet?

BETA: Ups, det er jeg ked af. Jeg mente: *For alle polyedre, som ikke har huler, tunneler eller "multipel struktur", gælder $V - E + F = 2$.*[†]

LÆREREN: Du må indrømme, at enhver ny version af din formodning kun er en *ad hoc* udelukkelse af modeksempler, som lige er dukket op. Når du støder på den hule terning, så udelukker du polyedre med *huler*. Når du støder på billedrammen, så udelukker du polyedre med *tunneler*. Jeg værdsætter din åbenhed og opmærksomhed. At tage hensyn til alle disse undtagelser er alt sammen meget godt, men jeg tror, at det vil være at foretrække at have en fremgangsmåde i stedet for din blinde famlen med "undtagelser". Det er godt at indrømme, at "alle polyedre er Eulerske" kun er en formodning. Men hvorfor så give "alle polyedre uden huler, tunneler osv. er Eulerske" status som en sætning, som ikke længere er en formodning? Hvordan kan du være sikker på, at du har opremset *alle* undtagelser?

BETA: Kan du give mig en, der ikke er medtaget?

ALFA: Hvad med mit pindsvin?

GAMMA: Og min cylinder?

LÆREREN: Jeg behøver ikke engang en konkret ny "undtagelse" i mit argument. Mit argument gik på *muligheden* for undtagelser.

BETA: Du kan nok have ret. Man skal ikke bare ændre synspunkt, hver gang et nyt modeksempel dukker op. Man skal ikke sige: "Hvis ingen undtagelser forekommer, så kan konklusionen udsiges generelt. Men hvis der på et eller andet tidspunkt senere dukker undtagelser op, må man nævne konklusionen sammen med disse undtagelser".[†] Lad mig tænke mig om. Vi gættede først på, at for *alle* polyedre gælder: $V - E + F = 2$, fordi vi fandt, at det var sandt for terninger, oktaedre, pyramider og prismer. Vi kan bestemt ikke "acceptere denne ynkelige vej at gå fra det specielle til det generelle".[†] Det var ikke noget under, at der dukkede undtagelser op, snarere var det overraskende, at vi ikke havde fundet mange flere meget før. Jeg tror, det var fordi, vi mest tænkte på *konvekse* polyedre. Så snart andre polyedre kom frem i lyset, så duede vores generaliseringer ikke længere.[†] Så i stedet for at udelukke undtagelserne en ad gangen, trækker jeg grænselinien beskeden, men på den sikre side: *Alle konvekse polyedre er Eulerske*.[†] Og så håber jeg, at I vil indrømme, at det ikke længere er en formodning, men at det er en sætning.

GAMMA: Hvad med min cylinder? Den er konveks!

BETA: Den er en vits!

LÆREREN: Lad os et øjeblik glemme cylinderen. Vi kan godt kritisere uden cylinderen. I denne nye modificerede version af metoden at udelukke undtagelser, som Beta så frisk diskede op med som svar på min kritik, er skridtvis undelukkelse erstattet med en strategisk indskrænkning af definitionsområdet, som man håber er stærk nok til at kunne bære formodningen. Du søger sikkerhed. Men er du så sikker, som du erklærer at være? Du har stadig ingen garanti for, at der ikke kunne være undtagelser indenfor dit nye definitionsområde. Desuden er der den modsatte fare. Kunne du have indskrænket begrebet for drastisk, så en stor bunke Eulerske polyedre efterlades udenfor? Vores oprindelige formodning var måske nok en overdrivelse, men din "perfekte" sætning virker for mig som en underdrivelse. Og du kan stadig ikke være sikker på, at det ikke også er en overdrivelse.

Men jeg vil også gerne fremsætte min *anden* indvending: dit argument glemmer alt om beviset. Når du gætter på definitionsområdet for formodningen, ser det ud som om, du overhovedet ikke bruger beviset til noget som helst. Du mener da vel ikke, at beviset er overflødig?

BETA: Det har jeg aldrig sagt.

LÆREREN: Nej, det har du ikke. Men du opdagede, at vort bevis ikke beviste vores oprindelige formodning. Beviser det din forbedrede formodning? Fortæl mig det.

BETA: Tjah ...[†]

ETA: Tak for dette argument, hr. lærer. Betas forvirring viser klart fortrinnet ved den bagtalte metode med misfosterudelukkelse. Vi siger nemlig, at beviset beviser, hvad det var konstrueret til at bevise og vort svar er utvetydigt. Vi tillader ikke lunefulde modeksempler, som kan ødelægge et respektabelt bevis' frihed, selv ikke hvis de er forklædt som ydmyge "undtagelser".

BETA: Jeg finder det overhovedet ikke pinligt, at jeg bliver tvunget til at detaljere, forbedre og — hav mig undskyldt — gøre min metodologi mere *perfekt* ud fra stimulansen fra kritikken. Mit svar er dette: jeg forkaster den oprindelige formodning som falsk, fordi der er undtagelser til den. Jeg forkaster også beviset, fordi de samme undtagelser også er undtagelser til mindst et af lemmaerne. (Med din terminologi vil det sige: globale modeksempler er også nødvendigvis lokale modeksempler). Alfa ville stoppe her, fordi gendrivelse ser ud til at tilfredsstille hans intellektuelle behov fuldstændig. Men jeg går videre. Ved på passende vis at indskrænke *både* formodningen og beviset til det rigtige definitionsområde, får jeg en perfekt *formodning*, som nu vil være *sand*, og et perfekt *bevis*, som nu vil være *stringent* og naturligvis ikke indeholde flere falske lemmaer. For eksempel så vi, at ikke alle polyedre kan flades ud i et plan, efter at en side er fjernet. Men alle *konvekse* polyedre kan. Jeg kan med god ret kalde min perfekte og stringent beviste formodning for en *sætning*. Jeg nævner den igen: *Alle konvekse polyedre er Eulerske*. For konvekse polyedre vil alle lemmaer være klart sande, og beviset, som ikke var stringent i sin falske generelle form, vil være stringent i det indskrænkede definitionsområde, som de konvekse polyedre udgør. Så jeg har besvaret dit spørgsmål, hr. lærer.

LÆREREN: Det vil altså sige, at lemmaerne, som så sande ud før undtagelserne var opdagede, igen ser sande ud ... indtil nye undtagelser opdages. Du indrømmede, at "Alle polyedre er Eulerske" er gætværk, og du har lige indrømmet, at "Alle polyedre uden huler og tunneler er Eulerske" også er gætværk. Hvorfor vil du ikke indrømme, at "Alle konvekse polyedre er Eulerske" lige så vel er et gæt?

BETA: Denne gang er det ikke *gætværk*, men *indsigt!*

LÆREREN: Jeg afskyr din hykleriske "indsigt". Jeg respekterer sande *gæt*, fordi det kommer fra menneskets bedste kvaliteter: mod og fordringsløshed.

BETA: Jeg foreslog en sætning: "Alle konvekse polyedre er Eulerske". Du har nu holdt en lang prædiken imod den. Kan du give et modeksempel?

LÆREREN: Du kan ikke vide om jeg kan. Du *forbedrede* den oprindelige formodning, men du kan ikke hævde, at det er en *perfekt* formodning, og at du har opnået perfekt stringens i dit bevis.

BETA: Kan *du*?

LÆREREN: Det kan jeg godt nok ikke. Men jeg tror, at min metode til at forbedre formodninger vil være en forbedring af din metode, for jeg vil etablere en enhed, en virkelig vekselvirkning mellem beviser og modeksempler.

BETA: Det vil jeg gerne høre mere om.