Opgaver hørende til undervisningsmateriale om Herons formel

20. juni 2016

I „Herons formel" (Danielsen og Sørensen, 2016) er stillet en række opgaver, som her gengives.

Referencer

Danielsen, Kristian og Henrik Kragh Sørensen (apr. 2016). „Herons formel. Hvordan en aleksandriner fik sat mål på alle slags trekanter". Kildecentreret matematikhistorie på STX. Accepteret.

Opgave 4.1 (Sammenligning mellem Heron og Euklid).
Man kan selvfølgelig ikke finde HERON FRA ALEXANDRIAS (ca. 10 e.v.t–ca. 70 e.v.t.) sætning I.8 hos EUKLID FRA ALEXANDRIA (ca. 295 f.v.t.), men man kan stadig kigge på ligheder og forskelle. For eksempel kan man fokusere på at sammenligne EUKLIDS og HERONS behandling af arealer eller deres generelle bevisteknik:

Arealer Hvordan beskriver EUKLID arealer i bog I af *Elementerne*? Find sætninger hos EUKLID, der handler om arealer. Hvordan beskriver og håndterer EUKLID arealer?

Bevisteknik Sammenlign HERONS og EUKLIDS måder at bevise sætninger på. Vælg nogle forskellige nedslag ud fra *Elementerne* bog I, og sammenlign både struktur og teknik i beviserne.

Opgave 4.2 (Forståelse af Herons eksempel).
Kan du følge HERONS udregninger (HERON har ikke en lommeregner, så det er meget besværligt at tage en kvadratrod)?

Prøv at kalde de tre sider på 7, 8 og 9 for henholdsvis a, b og c og de 12 kan du kalde s, kan du så opstille en formel for arealet? Passer det med den formel, du kender?

Opgave 4.3 (Eksperimentel udforskning af figur 4.1).
Implementér konstruktionen i figur 4.1 i dit geometriværktøj på en sådan måde, at du varierer udgangspunktet for m og se, hvordan $m' = \frac{m^2+n}{2m}$ varierer som funktion deraf, og hvordan rektanglet med siderne m og $\frac{n}{m}$ nærmer sig kvadratet med arealet n.

Opgave 4.4 (Tilnærmelse af kvadratrødder).

1. I kilden har Heron bestemt tilnærmelsen $\sqrt{720} \approx 26\frac{5}{6}$ ved et skridt i sin algoritme. Foretag endnu et skridt i algoritmen (fx ved at implementere den i Excel) for at opnå en endnu bedre approksimation og sammenhold den med den værdi, som din computer giver dig for $\sqrt{720}$.
2. Prøv nu Herons algoritme på et andet taleksempel, fx til at bestemme $\sqrt{1073}$.

Opgave 4.5 (kubikrødder).
I *Metrica* III.20 beregner HERON approksimationen $4\frac{9}{14}$ til $\sqrt[3]{100}$, hvilket faktisk er en rigtig god tilnærmelse.

1. Gennemgå HERONS udledning i taleksemplet, idet du sætter symboler på de størrelser, der indgår. Sæt fx $N = 100$ og indfør betegnelserne $a = 5$ og $b = 4$, således at $125 = a^3$ og $64 = b^3$. Hvad med de andre størrelser? Opstil nu en formel for kubikrodsuddragning ud fra HERONS beskrivelse.

2. Prøv den formel, som du fandt ovenfor, af på en række andre eksempler, fx $N = 109$. Hvor gode approksimationer giver det?

3. En central fortolkning er af de 100, som man i det oprindelige eksempel skal addere til de 180. Hvordan har du formaliseret dem? Kan du forestille dig andre størrelser, som de kunne dække over? Hvilke andre formler kan det så give anledning til? Hvilken formel tror du, at HERON faktisk har haft i tankerne, og hvordan vil du overhovedet kunne overveje at svare på sådan et spørgsmål?

Opgave 4.6 (Indskrivning af en cirkel i en trekant).
I denne opgave skal vi udforske, hvordan man kan indskrive en cirkel i en trekant, sådan at cirklen netop rører alle trekantens sider.

(A) Forklar, hvad sætningen Euklid IV.4 går ud på og tegn en figur. Hvilke linjer skal man bruge for at fastlægge den indskrevne cirkel?

(B) Konstruér i fx `Geogebra` en vilkårlig trekant og dens indskrevne cirkel. Variér de givne størrelser indtil du indser, at konstruktionen altid stemmer. Undersøg hvilke størrelser (linjestykker og vinkler) der er ens; brug evt. farver.

(C) Gennemfør EUKLIDS bevis for IV.4 (se side 29) og følg op på de sætninger, definitioner og postulater, som anvendes undervejs.

Opgave 4.7 (En firkant indskrevet i en cirkel).
I denne opgave skal vi udforske, hvad man kan konkludere om vinklerne i en firkant, der er indskrevet i en cirkel.

(A) Forklar, hvad sætningen Euklid III.22 går ud på og tegn en figur.

(B) Konstruér i fx `Geogebra` en cirkel og en vilkårlig firkant indskrevet deri. Mål firkantens vinkler. Variér firkantens form indtil du indser, at summen af modstående vinkler altid giver $180°$.

(C) Gennemfør EUKLIDS bevis for III.22 (se side 33) og følg op på de sætninger, definitioner og postulater, som anvendes undervejs.

Opgave 4.8 (Ensvinklede trekanter).
Hvis trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ er ensvinklede, dvs $A = A_1$, $B = B_1$ og $C = C_1$, da er $a_1/a = b_1/b = c_1/c = k$ eller $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$.

k kaldes forstørrelsesfaktoren eller skalafaktoren.

Vis at $a_1/b_1 = a/b$, $a_1/c_1 = a/c$, $b_1/c_1 = b/c$ (de reciprokke versioner gælder selvfølgelig også).

Opgave 4.9 (Ensvinklede trekanter og retvinklede trekanter).
Lad ABC være en retvinklet trekant med vinklen C ret. Tegn h_c (altså højden nedfældet fra vinklen C). Kald h_c's skæring med c for D.

Betragt trekanterne ABC, ACD og CBD. Vis at de tre trekanter er ensvinklede. (Det kan være en god idé at lave nye figurer, hvor trekanterne ikke ligger oven i hinanden, men er placeret ved siden af hinanden). Hvilke stykker svarer til hinanden i de tre trekanter?

Opgave 6.1 (Kontekstualisering af Heron og Alexandria).

1. Find oplysninger om HERON. Hvis du har svært ved at finde ham på nettet, kan du prøve at søge på „Heron fra Alexandria“. Hvad er han kendt for?

2. HERON boede i Alexandria omkring år 60 e.v.t. Find oplysninger om Alexandrias historie. Hvad er Museion og biblioteket i Alexandria?

Opgave 6.2 (Kildens opbygning).

1. Inddel kilden i 5–7 strukturelle enheder og beskriv hver enhed med et enkelt ord. Læg mærke til når der sker noget nyt i teksten — fx når der bliver konstrueret (tegnet) noget, og når der bliver argumenteret.
2. Forklar, hvordan de enkelte enheder identificeret i pkt. 1 står i relation til hinanden.

Opgave 6.3 (Kildens påstand).
Kilden er ikke udformet som en matematisk formel, så det kræver en udfoldning at finde ud af, hvad den faktisk siger.

1. Identificér den centrale påstand, som kilden er et argument for. Hvordan er påstanden formuleret i kilden?

Påstanden hævder, at noget er givet, hvis andre størrelser er givne, men den angiver ikke i udgangspunktet en måde at beregne den givne størrelse på. Denne opskrift skal findes senere i kilden.

2. Læs derfor kilden igennem idet du laver en skitse af situationen og indfører passende notation for alle *længder* og *arealer* undervejs.

3. Undervejs i din læsning støder du på HERONS formuleringer som fx „rektanglet på $CHEG$“, „kvadratet på EG“ og „rektanglet på BEC“. Oversæt disse vendinger til en notation, der så vidt muligt både repræsenterer den matematiske og den oprindelige formulering.

4. Oversæt alle kildens påstande til din notation. Du kan godt springe del-argumenter om vinkler og andre begrundelser over i første omgang, men det kan måske være en hjælp at markere rette vinkler.

5. Når du har en figur med længder angivet, så er du klar til at oversætte kildens påstand til en formel. Hvordan ser den ud?

Opgave 6.4 (Argumenter om ensvinklede trekanter).
To af de springende punkter i HERONS bevis består i at vise den sidste lighed i $\frac{CB}{BH} = \frac{BL}{EG} = \frac{BK}{KE}$ og i at udlede $\square CEK = EG^2$. I begge tilfælde argumenterer HERON ud fra ensvinklede trekanter.

1. Tegn en skitse med punkterne B, E, G, L. Hvad ved du forudgående om de indgående linjer og vinkler? Hvilke trekanter er ensvinklede? Hvordan når man frem til den ønskede sammenhæng mellem forhold?

2. Tegn en skitse med punkterne C, E, G, K. Hvad ved du forudgående om de indgående linjer og vinkler? Hvilke trekanter er ensvinklede? Hvordan når man frem til den ønskede sammenhæng mellem forhold?

Opgave 6.5 (Hvad skal vi med beviser og taleksempler?).
Kilden omfatter to taleksempler, som indrammer selve sætningen og beviset. Selvom eksempler og motivationer i dag er naturlige dele af matematiske tekster, så var den græske tradition helt renset for sådanne *overflødige* elementer. Hvilken rolle spiller taleksemplerne for læsningen af kilden? Hvorfor mon de er medtaget?

I den klassiske græske matematik som udfoldet i EUKLIDS *Elementer* er der ikke brugt plads på motivationer og eksempler. EUKLID og andre klassiske matematikere tænkte matematikken i termer af sætninger med beviser, og ikke nødvendigvis taleksempler. Overvej, om HERON mere ligner EUKLIDS matematiksyn eller din egen oplevelse af fagets metode og fremstilling.

Opgave 6.6 (Alternative bevistyper).
Der er siden HERON blevet givet adskillige andre beviser for HERONS formel, og fire af dem er samlet i kapitel 5.

I grupper kan eleverne arbejde med de fire beviser med henblik på:

1. At forstå det givne bevis og kunne forklare det til resten af klassen.
2. At kunne karakterisere de teknikker og forudsætninger, som indgår i beviset.
3. At kunne sammenligne beviset med HERONS originale bevis for på den måde yderligere at karakterisere HERONS argumentationsform.
4. At kunne diskutere hvilke former for viden, matematiske beviser kan give, herunder hvorfor man mon beviser samme sætning flere gange, og om nogle af beviserne er mere sikre (eller overbevisende) end andre. Overvej, hvordan dine egne forudsætninger indgår i vurderingen af de forskellige beviser.

Opgave 6.7 (Temaopgave: Konstruktionsgeometri).

1. Udvælg en (eller flere) af de sætninger fra EUKLIDS *Elementer* (fx III.22, IV.4, VI.13), som vi har arbejdet med i undervisningen. Forklar sætningen både i euklidiske termer (tegn evt. en figur) og i moderne notation. Gennemgå beviset og udpeg også, hvor beviset bygger på andre resultater.

2. Beskriv i dine egne ord kilden, hvori HERON beviste HERONS formel. Kommentér både på kildens form og indhold: Hvad handler kilden om? Hvordan er den opbygget? Hvem er afsender og modtager? Hvordan præsenterer afsenderen sit budskab? ...

3. Perspektivér endelig til konstruktionsgeometriens metoder og argumentationsformer, og sammenlign med andre måder at bedrive matematik på, fx ved at inddrage en trigonometrisk eller en algebraisk tilgang.