

Detaljer i figurbeviset for lemma 2

Henrik Kragh Sørensen

20. juni 2016

I „Herons formel“ (Danielsen og Sørensen, 2016) anvendes følgende lemma, som bevises af et figurbevis:

Lemma 2.

Hvis α , β og γ er tre vinkler, som opfylder, at $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, så er

$$\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = 1.$$

Det følgende bevis udbygger detaljerne i aflæsningen af den samlede figur, som er angivet i Danielsen og Sørensen (2016).

Bevis.

Skridt 1 (figur 1(a)): Først afsættes en retvinklet trekant med vinklen α og katete 1. Da bliver den anden katete $\tan \alpha$, og hypotenusen bliver $\sec \alpha$.

Skridt 2 (figur 1(b)): Dernæst afsættes vinklen β i en ny retvinklet trekant som vist. Idet den ene katete er $\sec \alpha$, bliver den anden katete $\sec \alpha \tan \beta$.

Skridt 3 (figur 1(c)): Nu afsættes en ny retvinklet trekant som vist. Det følger, at den angivne vinkel faktisk er α ved at sammenholde med trekanten i skridt 1.

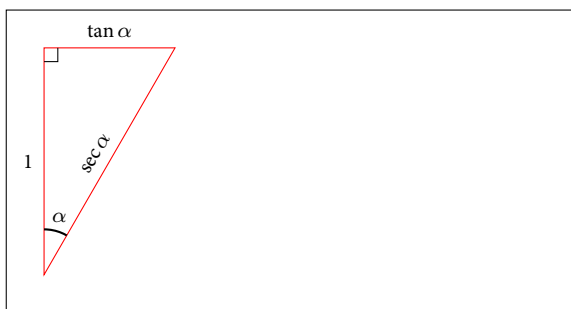
Skridt 4 (figur 1(d)): Den retvinklede trekant har hypotenusen $\sec \alpha \tan \beta$. Hvis kateten ved α var x , så skulle hypotenusen være $x \sec \alpha$. Derfor er den hosliggende katete $\tan \beta$, og den modstående katete bliver $\tan \alpha \tan \beta$.

Skridt 5 (figur 1(e)): Vinklen γ afsættes som vist, og idet vi udnytter, at $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, får vi en retvinklet trekant. Da hele figuren er et rektangel finder vi, at den vandret side er $\tan \alpha + \tan \beta$.

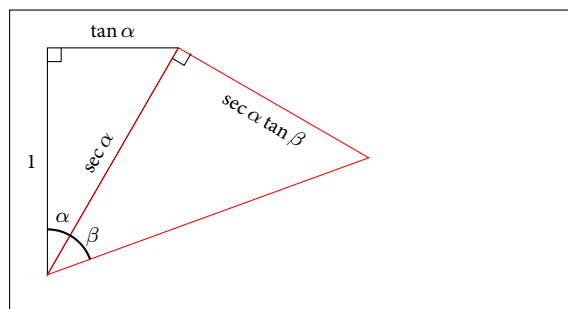
Skridt 6 (figur 1(f)): Idet kateten ved γ er kendt, bliver den modstående katete $\tan \gamma (\tan \alpha + \tan \beta)$. Når vi sammenligner de lodrette sider i rektanglet, finder vi relationen

$$1 = \tan \alpha \tan \beta + \tan \gamma (\tan \alpha + \tan \beta),$$

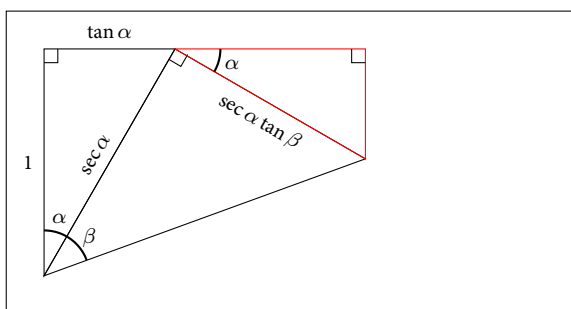
som netop er indholdet af lemmaet.



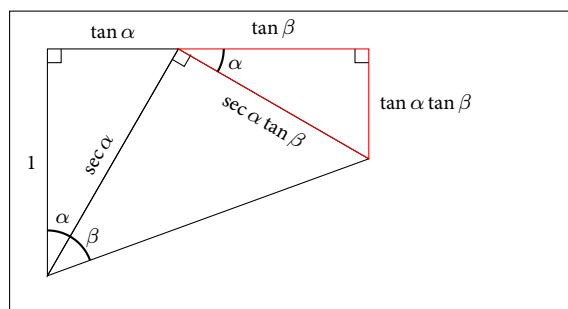
(a) Skridt 1 i figurbeviset.



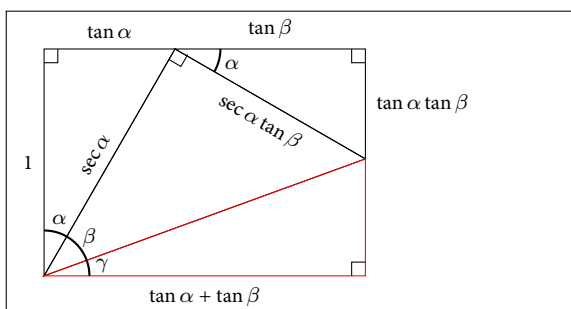
(b) Skridt 2 i figurbeviset.



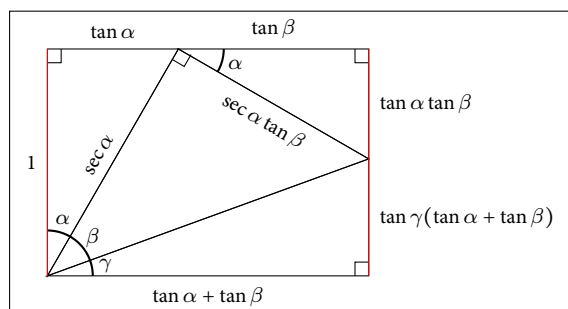
(c) Skridt 3 i figurbeviset.



(d) Skridt 4 i figurbeviset.



(e) Skridt 5 i figurbeviset.



(f) Skridt 6 i figurbeviset.

Figur 1: Figurbeviset for lemmaet delt ind i skridt.

REFERENCER

Danielsen, Kristian og Henrik Kragh Sørensen (apr. 2016). „Herons formel. Hvordan en alexandri-
ner fik sat mål på alle slags trekanter“. Kildecentreret matematikhistorie på STX. Accepteret.