Propositioner og beviser fra Euklid til brug for Herons formel

Henrik Kragh Sørensen

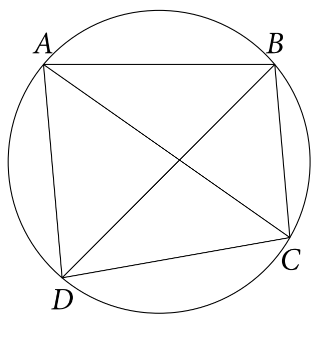
20. juni 2016

I „Herons formel" (Danielsen og Sørensen, 2016) henvises til en række resultater fra Euklid fra Alexandrias (ca. 295 f.v.t.) *Elementer*, som anvendes af Heron fra Alexandria (ca. 10 e.v.t–ca. 70 e.v.t.) til at bevise Herons formel. Her er resultaterne fra Euklid samlet med deres beviser i dansk oversættelse (Euklid, 1897–1912):

Sætning (Euklid III.22).
I en Firside, som ligger i en cirkel, ere de modstaaende Vinkler tilsammen lig to rette.

Bevis (Euklid III.22).
Lad $ABCD$ være en Cirkel, og lad $ABCD$ være en Firside i den. Jeg siger da, at de modstaaende Vinkler tilsammen ere lig to rette.

Lad AC og BD være dragne.



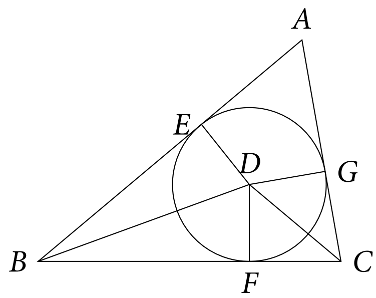
Da nu i enhver Trekant de tre Vinkler tilsammen ere lig to rette, saa er i $\triangle ABC$ de tre Vinkler CAB, ABC og BCA tilsammen lig to rette. Desuden er $\angle CAB = \angle BDC$, thi de ligge i samme Afsnit $BADC$, og $\angle ACB$ er lig $\angle ADB$, thi de ligge i samme Afsnit $ADCB$. Altsaa er hele Vinkel $ADC = \angle BAC + \angle ACB$. Lad ABC være lagt til dem begge, saa er $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle ABC + \angle ADC$. Men $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB$ er lig to rette. Altsaa er ogsaa $\angle ABC + \angle ADC$ lig to rette. Paa samme Maade ville vi ogsaa kunne bevise, at $\angle BAD + \angle DCB$ er lig to rette.

Altsaa: i en Firside, som ligger i en Cirkel, ere de modstaaende Vinkler tilsammen lig to rette; h. s. b.

Sætning (Euklid IV.4).
I en given Trekant at indskrive en Cirkel.

Bevis (Euklid IV.4).
Lad ABC være den givne Trekant. Man skal da i $\triangle ABC$ indskrive en Cirkel.

Lad Vinklerne ABC og ACB være halverede af de rette Linier BD og CD, og lad dem mødes i Punkt D, og lad DE, DF og DG være trukne fra D lodret paa AB, BC og CA.

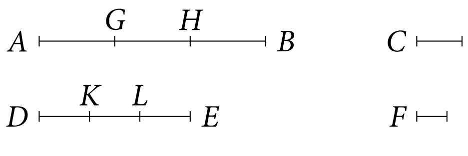


Da nu $\angle ABD$ er lig $\angle CBD$, og den rette Vinkel BED er lig den rette Vinkel BFD, saa have vi to Trekanter EBD og FBD, som have to Par Vinkler og et Par Sider ligestore, nemlig Fællessiden BD, som ligger overfor et Par ligestore Vinkler. Altsaa ville de ogsaa have de øvrige Sider ligestore. Altsaa er $DE = DF$. Af samme Grund er ogsaa $DG = DF$. Altsaa ere de tre rette Linier DE, DF og DG indbyrdes ligestore. Altsaa vil den Cirkel, som tegnes med D som Centrum og een af Afstandene til E, F eller G som Radius, ogsaa gaa gennem de andre Punkter. Og den vil røre de rette Linier AB, BC og CA, fordi Vinklerne ved Punkterne E, F og G ere rette. Thi hvis den skærer dem, saa vil den Linie, der trækkes vinkelret paa Cirklens Diameter fra dens Endepunkt, falde indenfor Cirklen; hvilket er bevist at være umuligt. Altsaa vil den Cirkel, som tegnes med D som Centrum og een af Afstandene til E, F eller G som Radius, ikke skære de rette Linier AB, BC og CA. Altsaa vil den røre dem. Og cirklen vil være indskreven i $\triangle ABC$. Lad den være indskreven som f. Ex. FGE.

Altsaa er der i den givne Trekant ABC indskrevet Cirklen EFG; h. s. g.

Sætning (Euklid V.15).
Delene have samme Forhold som de tilsvarende ens Mangefold af dem.

Bevis (Euklid V.15).
Lad nemlig AB være samme Mangefold af C som DE af F. Jeg siger da: $C/F = AB/DE$.



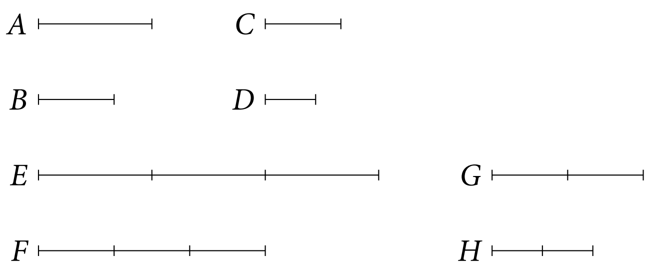
Thi da AB er samme Mangefold af C som DE af F, saa er der i DE ligesaa mange Størrelser lig F, som der i AB er Størrelser lig C. Lad AB være delt i Størrelserne AG, GH, HB hver lig C, og DE i Størrelserne DK, KL, LE hver lig F, saa vil Antallet af Størrelserne AG, GH, HB være lig Antallet af Størrelserne DK, KL, LE. Da nu AG, GH, HB ere indbyrdes ligestore, og desuden DK, KL, LE ere indbyrdes ligestore, saa er $AG/DK = GH/KL = HB/LE$. Saa vil eet af Forleddene forholde sig til sit Efterled som alle Forleddene tilsammen til alle Efterleddene tilsammen. Altsaa er: $AG/DK = AB/DE$. Men AG er lig C, og DK er lig F. Altsaa er: $C/F = AB/DE$.

Altsaa: Delene have samme Forhold som de tilsvarende Mangefold af dem; h. s. b.

Sætning (Euklid V.16).
Naar fire Størrelser ere proportionale, saa ville de ogsaa være proportionale paatværs.

Bevis (Euklid V.16).
Lad A, B, C, D være fire proportionale Størrelser: $A/B = C/D$. Jeg siger da, at de ogsaa ville være proportionale paatværs: $A/C = B/D$.

Lad der nemlig være taget samme Mangefold E og F af A og B og andre vilkaarlige samme Mangefold G og H af C og D.



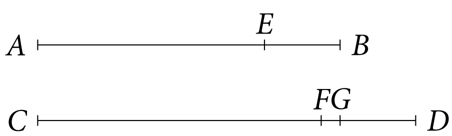
Da nu E er samme Mangefold af A som F af B, og Delene have samme Forhold som de tilsvarende ens Mangefold af dem, saa er $A/B = E/F$. Og A/B er lig C/D. Altsaa er $C/D = E/F$. Da endvidere G og H ere samme Mangefold af C og D, saa er $C/D = G/H$. Og C/D er lig E/F. Altsaa er $E/F = G/H$. Men naar fire Størrelser ere proportionale, og første Størrelse er enten større end eller lig med eller mindre end tredje, saa vil ogsaa anden være henholdsvis større end eller lig med eller mindre end fjerde; saa hvis E er $\overset{>}{\underset{<}{=}} G$, er ogsaa $F \overset{>}{\underset{<}{=}} H$. Men E og F ere samme Mangefold af A og B, og G og H andre vilkaarlige samme Mangefold af C og D. Altsaa er $A/C = B/D$.

Altsaa: Naar fire Størrelser ere proportionale, saa ville de ogsaa være proportionale paatværs; h. s. b.

Sætning (Euklid V.18).
Naar subtraherede Størrelser ere proportionale, ville de ogsaa adderede være proportionale.

Bevis (Euklid V.18).
Lad AE, EB, CF og FD være subtraherede proportionale Størrelser: $AE/EB = CF/FD$. Jeg siger da, at de ogsaa adderede ville være proportionale: $AB/BE = CD/FD$.

Thi hvis AB ikke forholder sig til BE som CD til DF, saa vil AB forholde sig til BE som CD til enten en mindre eller større Størrelse end DF.



Lad det først være til en mindre: DG. Da nu AB/BE er lig CD/DG, saa er der adderede proportionale Størrelser. Følgelig ville de ogsaa subtraherede være proportionale. Altsaa er $AE/EB = CG/GD$. Desuden er det givet, at AE/EB er lig CF/FD. Altsaa er $CG/GD = CF/FD$. Og første Størresle CG er større end tredje: CF. Altsaa er anden: GD ogsaa større end fjerde: FD; men den er ogsaa mndre, hvilket er umuligt. Altsaa forholder AB sig ikke til BE som CD til en

Størrelse, der er mindre end *FD*. Paa samme Maade ville vi kunne bevise, at det heller ikke er til en større Størrelse end *FD*; altsaa til netop den.

Altsaa: naar subtraherede Størrelser ere proportionale, ville de ogsaa adderede være proportionale; h. s. b.

REFERENCER

Danielsen, Kristian og Henrik Kragh Sørensen (apr. 2016). „Herons formel. Hvordan en aleksandriner fik sat mål på alle slags trekanter". Kildecentreret matematikhistorie på STX. Accepteret.

Euklid (1897–1912). *Euklids Elementer*. Oversat af T. Eibe. 6 bd. København: Nordisk Forlag.