Herons bevis for „Herons formel" (*Metrica* I.8)

Oversat til dansk af Kristian Danielsen

Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen (apr. 2016). „Herons formel. Hvordan en aleksandriner fik sat mål på alle slags trekanter". Kildecentreret matematikhistorie på STX. Accepteret

Der er en generel metode til at finde arealet af enhver slags trekant givet de tre sider uden højden. Lad fx trekantens sider være 7, 8, 9 enheder. Læg de 7 og de 8 og de 9 sammen: det giver 24. Tag halvdelen af disse, det giver 12. Træk de 7 enheder fra, resten er 5. Tag igen de 12 og træk de 8 fra, resten er 4. Og videre de 9, resten er 3. Multiplicér de 12 med de 5, det giver 60. Multiplicér disse med 4, det giver 240. Multiplicér disse med 3, det giver 720. Tag roden af disse og det vil være trekantens areal. Da altså 720 ikke har en rational rod, vil vi tage roden med den mindste forskel således: da det næste kvadrattal efter de 720 er 729, og det har roden 27, del de 720 med de 27, det giver 26 og to tredjedele, læg de 27 til, det giver 53 to tredjedele. Tag halvdelen af disse, det giver 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$. Altså har de 720 den tilnærmede rod de 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$. For de 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ multipliceret med sig selv giver 720 $\frac{1}{36}$, således at forskellen alene er brøken $\frac{1}{36}$. Hvis vi ønsker at forskellen skulle give en mindre brøk end de $\frac{1}{36}$, skal vi indsætte de nu fundne 720 og $\frac{1}{36}$ i stedet for de 729, og hvis vi gør dette, vil vi finde en forskel der bliver meget mindre end de $\frac{1}{36}$.

Det geometriske bevis for dette er således: At finde en trekants areal givet dens sider. Det er muligt at finde arealet af en trekant, når man tegner højden og finder dens længde, men lad det være nødvendigt at finde arealet uden højden.

Lad den givne trekant være *ABC* og lad hver af siderne *AB*, *BC* og *CA* være givne.

Find arealet.

Lad cirklen *DEF* være indskrevet i trekanten, med centrum *G*, og lad *AG*, *BG*, *CG*, *DG*, *EG* og *FG* være forbundne.

Derfor er rektanglet på *BC EG* det dobbelte af trekanten *BGC*, rektanglet på *CA FG* det dobbelte af trekant *ACG*, rektanglet på *AB DG* det dobbelte af trekant *ABG*. Derfor er rektanglet på trekanten *ABC*'s omkreds og *EG*, dvs. radius i *DEF*, det dobbelte af trekanten *ABC*.

Lad *BC* være forlænget og lad *BH* være lig *AD*.

Altså er *CBH* halvdelen af trekanten *ABC*'s omkreds, fordi *AD* er lig *AF*, *DB* er lig *BE*, og *FC* er lig *CE*. Altså er rektanglet på *CH EG* lig trekanten *ABC*. Men rektanglet på *CH EG* er side i kvadratet på *CH* multipliceret med kvadratet på *EG*. Derfor er arealet af trekant *ABC* multipliceret med sig selv lig kvadratet på *HC* multipliceret med kvadratet på *EG*.

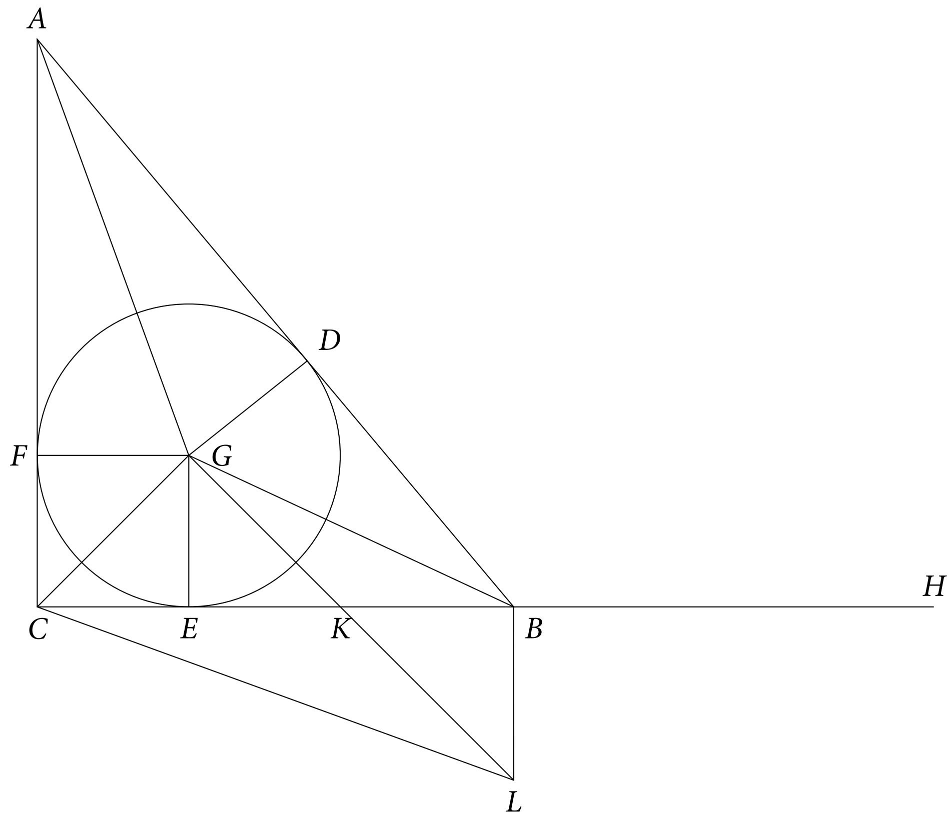
Lad *GL* være tegnet vinkelret på *CG*, *BL* vinkelret på *CB*, og lad *CL* være forbundne.

Da altså hver af vinklerne *CGL* og *CBL* er rette, er *CGBL* en firkant i en cirkel; derfor er vinklerne *CGB* og *CLB* lig to rette.

Vinklerne *CGB* og *AGD* er også lig to rette, fordi vinklerne ved *G* er halveret af *AG*, *BG* og *CG*, og vinklerne *CGB* og *AGD* er lig vinklerne *AGC* og *DGB*, og de er alle lig fire rette vinkler; derfor er vinkel *AGD* lig vinkel *CLB*. Og den rette vinkel *ADG* er lig den rette vinkel *CBL*. Altså er trekant *AGD* ligedannet med trekant *CBL*.

Altså som *BC* forholder sig til *BL*, forholder *AD* sig til *DG*, dvs. som *BH* til *EG*, og påtværs, som *CB* forholder sig til *BH*, forholder *BL* sig til *EG*, dvs. som *BK* til *KE*, fordi *BL* er parallel med *EG*, og adderet, som *CH* til *BH*, så forholder *BE* sig til *EK*: og derfor som kvadratet på *CH* forholder sig til rektanglet på *CH HB*, så forholder rektanglet på *BEC* sig til rektanglet på *CEK*, dvs til kvadratet på *EG*; for i en retvinklet trekant tegnes højden *EG* fra den rette vinkel til basen; så er kvadratet på *CH* multipliceret med kvadratet på *EG*, hvis side var trekanten *ABC*'s areal, lig rektanglet på *CHB* multipliceret med rektanglet på *CEB*. Og hver af siderne *CH*, *HB*, *BE* og *CE* er givne; for *CH* er halvdelen af trekanten *ABC*'s omkreds, *BH* er differensen som den halve omkreds overskrider *CB* med, *BE* er differensen som den halve omkreds overskrider *AC* med, *EC* er differensen som den halve omkreds overskrider *AB* med, da *EC* er lig *CF* og *BH* er lig *AF*, fordi den også er lig *AD*. Altså er arealet af trekanten *ABC* givet.

Syntesen er da således. Lad *AB* være 13 enheder, og *BC* 14 enheder, og *AC* 15 enheder. Læg de 13 og 14 og 15 sammen, det giver 42. Halvdelen af disse, det giver 21. Træk de 13 fra, resten er 8, så de 14, resten er 7, og igen de 15, resten er 6. Multiplicér de 21 med de 8, og resultatet med de 7, og igen resultatet med de 6. Det giver 7056. 84 er rod i disse. Så stort bliver trekantens areal.



Figur 1: Figuren, som ledsager Herons sætning, konstruktion og bevis.