Oversættelse af Descartes' metode til normalbestemmelse

Henrik Kragh Sørensen

12. september 2018

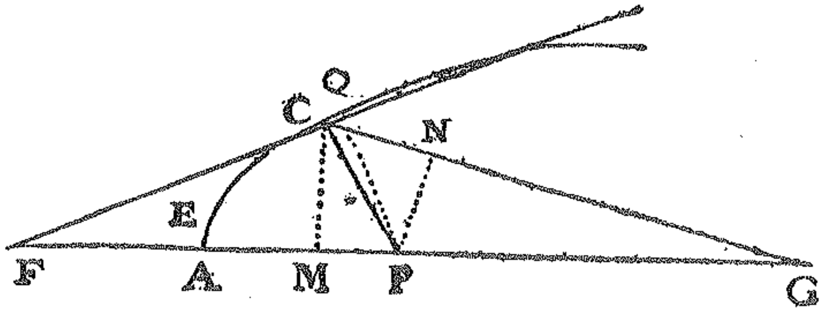
Den følgende oversættelse til dansk er foretaget af Henrik Kragh Sørensen og baseret på den engelske oversættelse i D. E. Smith og M. L. Latham, red. (1954). *The geometry of René Descartes*. Facsimile and English translation. New York: Dover Publications, Inc., s. 92–107. Figurerne er de oprindelige, og de kan også findes i Smith og Latham (1954). For en beskrivelse af Descartes' metode til normalbestemmelse, se også Victor J. Katz (2014). *A History of Mathematics*. 3. udg. Harlow: Pearson Education, s. 511–512, og for en generel introduktion til Descartes i matematikhistorisk perspektiv henvises til Henrik Kragh Sørensen (2018). „Descartes' *Geometri* i matematikhistorisk belysning". I: *René Descartes og hans* Geometri*. Med oversættelse af 1. bind*. Udg. af Karen Thorsen, Henrik Kragh Sørensen og Knud Erik Sørensen. Steno Museets Venner, s. 19–28.

Når relationen mellem alle punkter på en kurve og alle punkter på en ret linje er kendt på den måde, som jeg allerede har beskrevet [givet ved kurvens ligning], så er det let at finde relationen mellem kurvens punkter og alle andre givne punkter og linjer; og ud fra disse relationer kan man finde dens [kurvens] diametre, akser, center og ander linjer [for eksempel tangenter og normaler] og punkter, som har særlig betydning for denne kurve; og derudfra kan man opdage forskellige måder at beskrive kurven på og vælge den letteste.

Denne metode alene tillader at man kan finde alt hvad der kan bestemmes om størrelsen af deres arealer [dvs. kurvernes kvadratur] , og der er ikke behov for yderligere forklaring fra mig.

Endelig er alle andre egenskaber ved kurver udelukkende afhængige af de vinkler, som disse kurver danner med andre linjer. Men vinklen dannet af to skærende kurver kan let måles [bestemmes] som vinklen mellem to rette linjer, forudsat at man kan tegne [bestemme] en ret linje, som danner rette vinkler med disse kurver i deres skæringspunkt. Dette er min begrundelse for at mene at jeg her skal have givet en tilstrækkelig introduktion til studiet af kurver, når jeg har givet en generel metode til at tegne [bestemme] en ret linje, som danner rette vinkler med en kurve i et arbitrært valgt punkt på denne. Og jeg bryster mig af at sige, at dette er ikke blot det mest anvendelige og mest generelle problem i geometrien, som jeg er bekendt med, men som jeg nogensinde kunne ønske mig at kende til.

Lad CE være den givne kurve, og lad det være forlangt at tegne en ret linje gennem C, som danner rette vinkler med CE [se figur 1]. Antag, at problemet er løst, og lad den efterspurgte linje være CP. Forlæng CP så den skærer den rette linje GA, hvortil punkterne på CE er relaterede [dvs. GA er en af koordinatakserne]. Lad så $MA = CB = y$ og $CM = BA = x$. En ligning må da findes, som udtrykker relationen mellem x og y [det vil så være kurvens ligning]. Jeg lader $PC = s$, $PA = v$ hvorved $PM = v - y$. Siden PMC er en retvinklet trekant, ser vi, at s^2 — kvadratet på hypotenusen — er lig med $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$ — summen af kvadraterne på de to sider. Altså er $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ eller $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$. Ved hjælp af en af disse to ligninger kan jeg eliminere en af de to størrelser x eller y fra den ligning, som udtrykker relationen mellem punkterne på kurven CE og punkterne på den rette linje GA. Hvis x skal elimineres, kan dette let gøres ved at erstatte x — hvorend det optræder — med $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$, x^2 med kvadratet på dette udtryk, x^3 med dets kubus, osv.; hvorimod hvis y skal



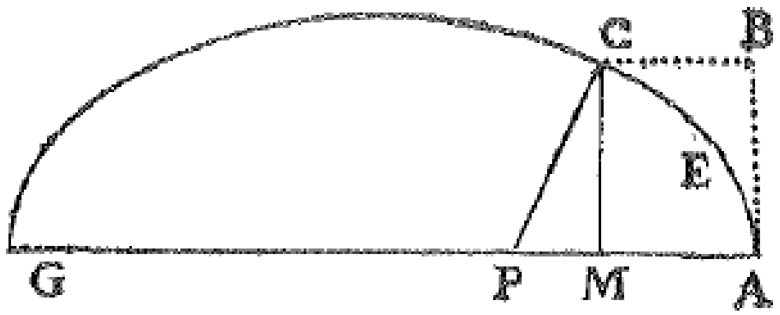
Figur 1: Fra Descartes (1637, s. 344) [Gengivet fra The Internet Archive (`www.archive.org`)]; se også Smith og Latham (1954, s. 94).

elimineres, må y erstattes med $v + \sqrt{s^2 - x^2}$, og $y^2, y^3, \ldots$ med kvadratet på dette udtryk, dets kubus, osv. Resultatet vil blive en ligning i kun en ubekendt størrelse, x eller y.

For eksempel, hvis CE er en ellipse [se figur 2], MA er segmentet af dens akse, hvortil CM er en ordinat, r er dens *latus rectum*, og q er dens transversale akse, så har vi ifølge sætning 13, bog I i Apollonius at $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$. Når man eliminerer x^2 bliver den resulterende ligning

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2 \quad \text{eller} \quad y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0. \tag{[1]}$$

I dette tilfælde er det bedre at betragte det hele som udgørende et enkelt udtryk end som sammensat af to lige store dele.

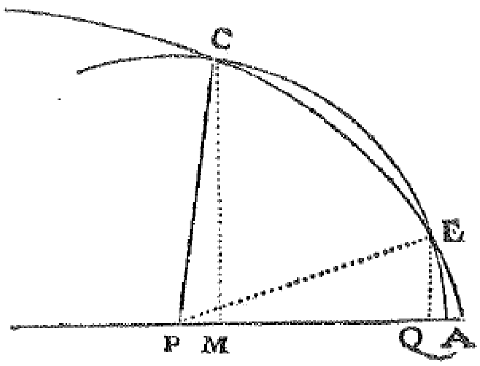


Figur 2: Fra Descartes (1637, s. 343) [Gengivet fra The Internet Archive (`www.archive.org`)]; se også Smith og Latham (1954, s. 97).

[...]

Når sådan en ligning er fundet [som udtrykker en relation mellem enten x eller y og størrelserne v eller s], så skal den ikke bruges til at bestemme x, y, eller z, som er kendte da punktet C er givet, men derimod til at finde v eller s, som bestemmer det ønskede punkt P. Med det samme formål observerer man, at hvis punktet P opfylder de ønskede betingelser, så vil cirklen omkring centrum P og gennem punktet C berørere men ikke skære kurven CE. Men hvis punktet P skulle være nok så lidt nærmere eller fjernere fra A end det er det skal være, så må denne cirkel skære kurven ikke blot i C men også i et yderligere punkt. Hvis nu denne cirkel skærer CE, så må ligningen indeholdende x og y som ubekendte størrelser (idet PC og PA antages kendte) have to forskellige rødder. Antag for eksempel, at cirklen skærer kurven i punkterne C og E [se figur 3]. Tegn EQ parallel med CM. Så kan x og y benyttes til at repræsentere hhv. EQ og QA på præcis samme måde, som de blev brugt til at repræsentere CM og MA. Eftersom PE er lig med PC (idet de er radier samme cirkel) vil vi få den samme ligning hvis vi søger EQ og QA (og antager at PE og PA er givne) som vi skulle opnå, hvis vi søgte CM og MA (og antog PC og

PA for givne). Det følger så, at værdien af x eller y eller enhver anden sådan størrelse vil være dobbelt i denne ligning; det vil sige, at ligningen vil have to forskellige rødder. Hvis værdien for x er ønsket, vil den ene af disse rødder være CM, og den anden vil være EQ; hvis derimod y er eftersøgt, vil den ene rod være MA og den anden QA. Det er sandt, at hvis E ikke er på samme side af kurven som C, så vil kun en af disse være en sand rod, den anden vil være tegnet i den modsatte retning, eller være mindre end ingenting. Jo tættere på hinanden punkterne C og E er taget, jo mindre forskel vil der være mellem rødderne; og når punkterne er sammenfaldende, vil rødderne være præcist lige store, hvilket vil sige, at cirklen gennem C vil berøre kurven CE i punktet C uden at skære den.



Figur 3: Fra Descartes (1637, s. 346) [Gengivet fra The Internet Archive (`www.archive.org`)]; se også Smith og Latham (1954, s. 102).

Endvidere observerer man, at når en ligning har to identiske rødder, så må dens venstre side være ligedannet i form med det udtryk, man opnår, når man ganger forskellen mellem den ubekendte størrelse og en kendt, lige så stor størrelse med sig selv og derefter — hvis ikke det resulterende udtryk har lige så høj grad som den oprindelige ligning — ganget med yderligere et udtryk, som gør graderne lige store. Dette sidste skridt får de to udtryk til at stemme overens led for led.

For eksempel hævder jeg, at [venstresiden i] den første ligning, som optræder i denne diskussion [se formel ([1]), ovenfor], nemlig

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r},$$

må have samme form som det udtryk, man finder når man lader $e = y$ og ganger $y - e$ med sig selv, altså $y^2 - 2ey + e^2$. Vi kan så sammenligne de to udtryk led for led og finder: Eftersom det første led, y^2 er det samme i begge, må det andet led af det første udtryk, $\frac{qry-2qvy}{q-r}$, være lig med det andet led i det andet udtryk, $-2ey$. Altså, når man løser for v eller PA, har vi $v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, eller idet vi har antaget e lig med y, $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. På samme måde kan vi finde s ud fra det tredje led, $e^2 = \frac{qv^2-qs^2}{q-r}$; men eftersom v fuldstændig bestemmer P, som var alt hvad der var efterspurgt, er det ikke nødvendigt at gå videre.