Kildecentreret matematikhistorie

Platon og Euklid om de regulære polyedre: matematik og kosmologi*

Henrik Kragh Sørensen

30. juli 2019

Indhold

1 Den centrale kilde

Den antikke græske filosof PLATON forfattede flere dialoger, der berørte og inddrog matematik. Mest kendt er sikkert hans dialog *Menon*, i hvilken en slavedreng uden forudgående kundskaber igennem sokratiske spørgsmål føres til at bevise en matematisk sætning, og værket *Staten*, hvori PLATON skitserer en vigtig didaktisk rolle for matematikken som trin på vejen til filosofisk erkendelse af Det Gode, og hvor han beskriver sin berømte *linjelignelse*. Men matematik indgår også på mere inddirekte måder i nogle andre dialoger som fx *Theaitetos* og *Timaios*. Sidstnævnte dialog er en kosmologisk beretning, hvori matematik indgår centralt, og denne dialog udgør den centrale kilde i en ny dansk oversættelse (Platon, 2013).

PLATONS værker er skrevet i en karakteristisk dialogisk form, som dels er manifesteret igennem en rammefortælling og dels igennem en dialog, hvori Sokrates typisk fremstår som den udspørgende

*Denne note er en samling af forskellige noter, som jeg har udviklet til undervisningsbrug ved Aarhus Universitet, 2001–2015.

part. I dialogen *Timaios* er der derimod efter rammefortællingen nærmere tale om en monolog af karakteren Timaios, som fortæller en skabelsesberetning. Timaios er ikke kendt uafhængigt af Platons dialog, men deraf fremgår, at han stammede fra Lokri i det sydlige Italien. Undervejs i Timaois' præsentation indgår der matematik på forskellige måder, både i form af generelle betragtninger (verden er ordnet efter matematiske begreber) og mere konkret baseret på harmonier og regulære figurer.

Du kan læse en smule mere om Platon og hans filosofi i kap. 2.2: „The Time of Plato" (Katz, 2014, 41–43) og om Euklids bog XIII i kap. 3.8: „Solid Geometry and the Method of Exhaustion" (Katz, 2014, 83–88). For en dybere indføring i dialogens filosofiske betydning og indhold henvises også til fx Zeyl (2009).

Hvis du læser hele dialogen, vil du sikkert opleve, at ikke alt er lige relevant for en matematikhistorisk behandling. Derfor er der i dette udvalg kun behandlet fire brudstykker:

1. Tekst A (Platon, 2013, ss. 547–551) indleder dialogen og udgør den yderste rammefortælling.

2. Efter tekst A følger Kritias' gengivelse af Solons fortælling om Athenas by Neith i Egypten og dens kamp mod en overmægtig stormagt lokaliseret på en ø udenfor Heraklessøjlerne (Gibraltar). Athenas by var den tapreste i krig og havde de bedste love og besejrede Atlantis-øen (som den senere benævnes i dialogen *Kritias*): På et enkelt døgn gik øen til i jordskælv og oversvømmelser. Efter sin fortælling følger Kritias' afslutning og overgangen til Timaios' fortælling i tekst B (Platon, 2013, ss. 556–558).

3. Efter en lovprisning af guderne — som bliver accepteret af tilhørerne — begynder Timaios sin udredning af skabelsen, hvori de platoniske legemer indgår, i tekst C (Platon, 2013, ss. 560–567).

4. Lidt senere i dialogen forklarer Timaios om elementernes former og egenskaber i tekst C (Platon, 2013, ss. 586–594).

Dialogen omfatter mange andre aspekter af verdens og menneskenes indretning, og kan anbefales i sin helhed.

Behandlingen af den centrale kilde kan fokusere på følgende punkter:

1. Produktions- og virkningskonteksten: Hvad kan du finde ud af om Platons liv og hans værk? Hvordan passer dialogen *Timaios* ind i hans filosofiske program? Hvad kan du finde ud af om andre matematiske indspark i kosmologiske diskussioner i antikken — fx Pythagoræerne? Hvad kan du finde ud af om forholdet mellem Platon og Euklid?

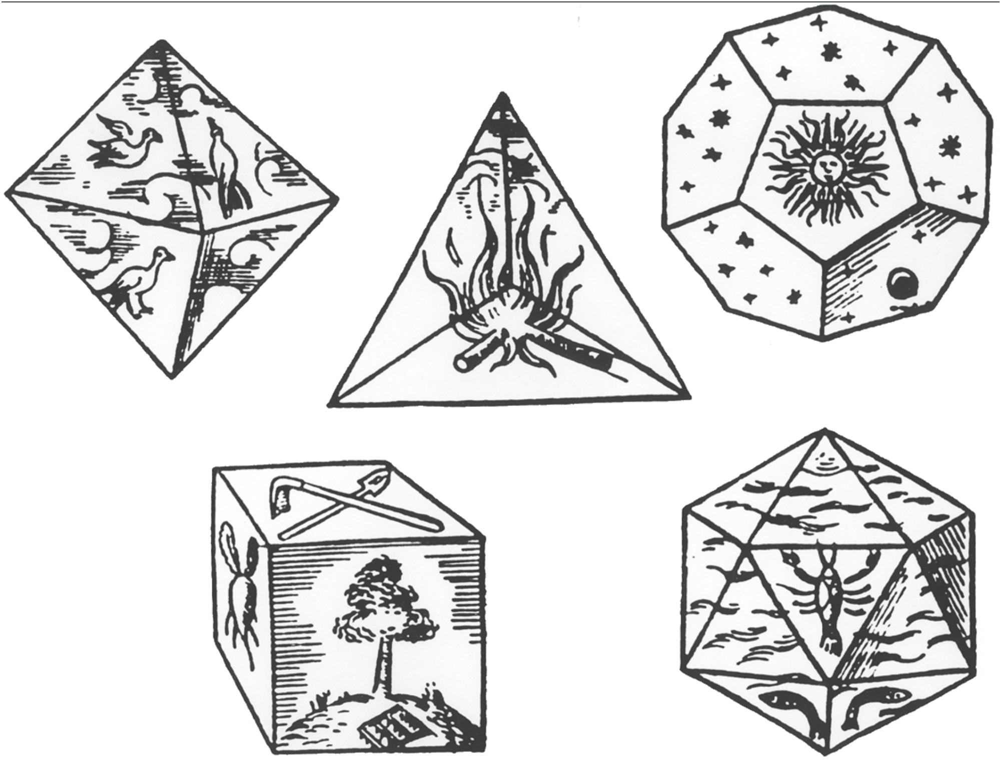
2. Indholdet (matematikkens rolle i kosmologien): Hvilken rolle spiller matematikken i Platons (Timaios') kosmologi? Kan man sige, at matematikken *forklarer* noget eller spiller en ordende rolle?

3. Indholdet (regulære polyedre): En central del af Platons (Timaios') argument går ud på, at der findes fem regulære polyedre, som knyttes til de fire elementer. Hvordan foregår den tilordning? Hvilken status har de fire elementer i antikkens filosofi? Hvordan når Platon frem til det femte element?

4. Matematisk perspektiv: Der findes hos Euklid et bevis for, at der findes præcist fem regulære polyedre (og konstruktioner af dem). Brug din viden om Euklids værk til at finde disse resultater. Hvordan bliver de bevist? Hvad siger det om relationen mellem Platon og Euklid?

2 Forslag til perspektiver

Smukke trekanter: Timaios benytter nogle matematiske overvejelser omkring opsplitning af trekanter til at forklare nogle processer, der måske er fysiske eller kemiske (Artmann og Schä-



Figur 1: De fem regulære polyedre og deres tilordning til elementerne, her fra Keplers *Harmonices mundi* (1619).

fer, 1993). Hvordan forløber hans argumenter? Hvilke overvejelser om matematikken indgår derigennem i kosmologien?

Regulære polyedre: En anden central del af Timaios' argument er baseret på firelegemeteorien grundlagt i regulære polyedre. Som nævnt er de regulære polyedre behandlet indgående i EUKLID' *Elementer*, så en oplagt perspektivering ville beskrive EUKLIDS resultater og beviser.

Matematisk kosmologi: Ideen om at matematik kunne spille en rolle i verdens indretning har en lang historie, som i hvert fald går tilbage til pythagoræerne og har flere fortalere fra 1500-tallet og frem. Et af de meget udtalte eksempler er i KEPLERS nærmest mystiske, tidlige kosmologi, og denne vil udgøre en oplagt perspektivering af den centrale kilde (Charrak, 2005; Schoot, 2001).

3 Indledning til læsning af afsnittene fra EUKLID's *Elementer* om konstruktion af de regulære polyedre

Der er kun medtaget hans beskrivelse af konstruktionen af tetraederet (af EUKLID kaldet *pyramiden*), oktaederet og terningen, da de to resterende konstruktioner er ret så komplicerede. Da formuleringsmåden er ny for jer, vil I sikkert også finde beskrivelserne af de simple konstruktioner svære at gå til. Men fortvivl ikke, tag en blyant i hånden (eller kald et tegneprogram frem på computeren) og tegn nogle mere illustrative tegninger (eventuelt fra flere indfaldsvinkler) end dem, der er hos EUKLID, prøv desuden som matematikere at "knække" EUKLID's prosa. Ved løsningen er det godt at vide følgende.

Lemma 1. EUKLID anvender i konstruktionerne af tetraederet og terningen følgende figur. Et linjestykke AB er delt i C, således at $AC = 2CB$, der er på AB tegnet en halvcirkel og CD er konstrueret, så den er vinkelret på AB og har sit andet endepunkt på cirklen. EUKLID har i en følgesætning til VI.8 vist at

$$AC : CD = CD : CB \tag{1}$$

Det kan I indse, ved at benytte (2) at trekanterne ACB og DCB er ensvinklede og i øvrigt også ensvinklet med trekant ACB.[1]

En stor del af EUKLID's "geometriske regninger" bygger på omtalte trekant samt (1) og (2). For at gøre livet lidt nemmere for jer selv, må I gerne sætte AB lig med for eksempel $2r$ og udtrykke de andre indgående linjestykker ved hjælp af r ved brug af rationale og irrationale tal. Disse udtryk finder I ved at bruge (1) og PYTHAGORAS' sætning.

Et andet resultat EUKLID bruger et par gange, har han ikke formuleret eksplicit, men det kan let udledes fra hans sætninger om cirklen. Det kan formuleres som følger.

Lemma 2. Givet et linjestykke AB, en plan og en vinkel v. Alle punkter, der i ligger over AB og for hvilke vinkel $ACB = v$ ligger på en cirkelbue[2] med AB som korde. Hvis $v = 90°$ gælder at punkterne ligger på halvcirklen med AB som diameter.

Lemma 3. (Euklid XI. 4.) *Når en ret linje er oprejst vinkelret på to rette linjer, som skærer hinanden, i skæringspunktet, vil den også være vinkelret på planen gennem dem.*

Du kan læse en smule mere om EUKLID's bog XIII i Katz, 1998, ss. 94–95.

3.1 Euklid's konstruktioner af regulære polyedre

Efter proposition XIII.18 skriver EUKLID:

»Jeg siger saa, at udover de nævnte fem Figurer vil der ikke kunne konstrueres nogen Figur, indesluttet af indbyrdes ligestore, ligesidede og ensvinklede Figurer.

Af to Trekanter eller overhovedet plane Figurer kan der nemlig ikke konstrueres en
XI D.11 rumlig Vinkel, men af tre Pyramidens, af fire Oktaedrets og af fem Ikosaedrets, og af sex ligesidede og ensvinklede Trekanter, som konstrueres ved eet Punkt, vil der ikke dannes en rumlig Vinkel, thi da den ligesidede Trekants Vinkel er $\frac{2}{3}$ ret, ville de sex Vinkler tilsammen være lig fire rette, hvilket er umuligt, thi enhver rumlig Vinkel indesluttes af
XI 21 Vinkler, som tilsammen ere mindre end fire rette. Af samme Grund kan der heller ikke af flere end sex plane Vinkler konstrueres en rumlig Vinkel. Af tre Kvadrater indesluttes Tærningens Vinkel, men af fire er det umuligt, thi de ville atter tilsammen være fire rette. Af ligesidede og ensvinklede Femkanter, nemlig af tre, indesluttes Dodekaedret, men af fire er det umuligt, thi da den ligesidede Femkants Vinkel er $1\frac{1}{5}$ ret, ville de fire Vinkler tilsammen være større end fire rette, hvilket er umuligt. Heller ikke vil en rumlig Vinkel indesluttes af andre polygone Figurer paa Grund af samme Urimelighed.

Altsaa: udover de nævnte fem Figurer vil der ikke kunne konstrueres nogen rumlig Figur, indesluttet af ligesidede og ensvinklede Figurer; h. s. b.«

Proposition XIII.13

»*At konstruere en Pyramide, omslutte den med en given Kugle og bevise, at Kuglens Diameter i Potens er halvanden Gange Pyramidens Side.*

Lad den givne Kugles Diameter AB være afsat, lad den være delt i Punkt C, saa at AC er
VI 10 $2CB$, lad der paa AB være tegnet en Halvcirkel ADB, lad der fra Punkt C være trukket CD vinkelret paa AB, og lad DA være dragen; lad der være afsat en Cirkel EFG, hvis Radius
IV 2 er lig DC, lad deri Cirkel EFG være indskrevet en ligesidet Trekant EFG, lad der være

III 1 taget Cirklens Centrum Punkt H, lad EH, HF og HG være dragne, lad der fra Punkt H være
opreist HK vinkelret paa Cirkel EFG's Plan, lad der paa HK være afskaaret HK lig den rette XI 12
Linie AC, og lad KE, KF og KG være dragne. Da nu KH er vinkelret paa Cirkel EFG's Plan,
saa vil den danne rette Vinkler med alle de rette Linier, der have et Punkt fælles med
den og ligge i Cirkel EFG's Plan. Og hver af Linierne HE, HF og HG har et Punkt fælles XI D.3
med den. Altsaa er HK vinkelret paa hver af Linierne HE, HF og HG. Da nu $AC = HK$, og
$CD = HE$, og de indeslutte rette Vinkler, saa er Grundlinie DA = Grundlinie KE. Af samme I 4
Grund er saa hver af Linierne KF og KG ogsaa lig DA. Altsaa ere de tre Linier KE, KF og KG
ligestore. Da nu AC er $2CB$, saa er AB $3BC$ og $AB/BC = \square AD/\square DC$, som det næstefter
skal bevises. Altsaa er $\square AD$ $3\square DC$. Desuden er $\square FE$ $3\square EH$, og $DC = EH$. Altsaa er
ogsaa $DA = EF$. Men det blev bevist, at DA er lig hver af Linierne KE, KF og KG. Altsaa er
ogsaa hver af Linierne EF, FG og GE lig hver af Linierne KE, KF og KG. Altsaa ere de fire
Trekanter EFG, KEF, KFG og KEG ligesidede. Altsaa er der konstrueret en Pyramide af fire
ligesidede Trekanter; hvis Grundflade er EFG, og hvis Toppunkt er K.

Man skal saa omslutte den med en given Kugle og bevise, at Kuglens Diameter i Potens er halvanden Gange Pyramidens Side.

Lad nemlig en ret Linie HL være afsat i Forlængelse af KH, og lad HL være afsat lig CB.
Da nu $AC/CD = CD/CB$, og $AC = KH$, $CD = HE$ og $CB = HL$, saa er $KH/HE = EH/HL$. Altsaa VI F.8
er $\square KH, HL = \square EH$. Og hver af Vinklerne KHE og EHL er ret. Altsaa vil den Halvcirkel, VI 17
som kan tegnes paa KL, gaa gennem E. Naar saa, idet KL staar fast, Halvcirklen føres
rundt, indtil den vender tilbage igen til det Sted, hvorfra den begyndte, vil den gaa ogsaa
gennem Punkterne F og G, idet paa samme Maade, naar FL og LG drages, Vinklerne ved F
og G blive rette, og Pyramiden vil være omsluttet af den givne Kugle, thi Kuglens Diameter
KL er lig den givne Kugles Diameter AB, fordi KH jo er afsat lig AC og HL lig CB.

Jeg siger saa, at Kuglens Diameter i Potens er halvanden Gange Pyramidens Side.

Thi da AC er $2CB$, saa er AB $3BC$. Altsaa er, bagvendt, BA $1\frac{1}{2}AC$. Og $BA/AC = \square BA/\square AD$.
Altsaa er ogsaa $\square BA$ $1\frac{1}{2}\square AD$. Og BA er den givne Kugles Diameter, og AD er lig Pyramidens Side.

Altsaa er Kuglens Diameter halvanden Gange Pyramidens Side; h. s. b.«

Proposition XIII.14

»*At konstruere et Oktaeder, omslutte det med en Kugle som før og bevise, at Kuglens Diameter i Potens er to Gange Oktaedrets Side.*

Lad den givne Kugles Diameter AB være afsat, lad den være halveret i C, lad der paa
AB være tegnet en Halvcirkel ADB, lad der fra C være trukket CD vinkelret paa AB, og
lad DB være dragen; lad der være afsat et Kvadrat $EFGH$, hvor hver af Siderne er lig DB,
lad HF og EG være dragne, lad der fra Punkt K være oprejst en ret Linie KL vinkelret paa
Kvadrat $EFGH$'s Plan og fortsat paa den anden Side af Planen som KM, lad der paa KL og XI 12
KM være afskaaret henholdsvis KL og KM ligestore med een af Linierne EK, FK, GK og
HK, og lad LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG og MH være dragne. Da nu $KE = KH$, og $\angle EKH$ er
ret, saa er $\square HE$ $2\square EK$. Da endvidere $LK = KE$, og $\angle LKE$ er ret, saa er $\square EL$ $2\square EK$. I 47
Desuden blev det bevist, at $\square HE$ er $2\square EK$. Altsaa er $\square LE = \square EH$. Altsaa er $LE = EH$. Af
samme Grund er saa ogsaa $LH = HE$. Altsaa er $\triangle LEH$ ligesidet. Paa samme Maade ville
vi saa ogsaa kunne bevise, at hver af de øvrige Trekanter, hvis Grundlinier ere $\square EFGH$'s
Sider, og hvis Toppunkter ere L og M, er ligesidet. Altsaa er der konstrueret et Oktaeder,
indesluttet af otte ligesidede Trekanter.

Man skal saa omslutte det med en given Kugle og bevise, at Kuglens Diameter i Potens er to Gange Oktaedrets Side.

[1]Husk at vinkel D er ret, fordi den spænder over en bue på 180°.

[2]Den såkaldte synsvinkelbue.

Thi da de tre Linier *LK*, *KM* og *KE* ere ligestore, saa vil den Halvcirkel, som kan tegnes paa *LM*, gaa gennem *E*. Og naar, idet *LM* staar fast, Halvcirklen føres rundt, indtil den vender tilbage igen til det Sted, hvorfra den begyndte, vil den af samme Grund gaa gennem Punkterne *F*, *G* og *H*, og Oktaedres vil være omsluttet af en Kugle. Jeg siger saa ogsaa, at det er den givne. Thi da $LK = KM$, og *KE* er fælles, og de indeslutte rette Vinkler,
I 4 saa er Grundlinie LE = Grundlinie EM. Da nu $\angle LEM$ er ret, thi den er i en Halvcirkel, saa
III 31 er $\square LM$ $2\square LE$. Da endvidere $AC = CB$, er AB $2BC$. Og $AB/BC = \square AB/\square BD$. Altsaa
I 47 er $\square AB$ $2\square BD$. Desuden blev det bevist, at $\square LM$ er $2\square LE$. Og $\square DB = \square LE$, thi *EH* er
afsat lig *DB*. Altsaa er ogsaa $\square AB = \square LM$. Altsaa er $AB = LM$. Og *AB* er den givne Kugles Diameter. Altsaa er *LM* lig den givne Kugles Diameter.

Altsaa er Oktaedret omsluttet af den givne Kugle, og med det samme er bevist, at Kuglens Diameter i Potens er to Gange Oktaedrets Side; h. s. b.«

Proposition XIII.15

»*At konstruere en Tærning, omslutte den med en Kugle ligesom Pyramiden og bevise, at Kuglens Diameter i Potens er tre Gange Tærningens Side.*

VI 10 Lad den givne Kugles Diameter *AB* være afsat, lad den være delt i *C*, saa at *AC* er $2CB$,
lad der paa *AB* være tegnet en Halvcirkel *ADB*, lad der fra *C* være trukket *CD* vinkelret paa *AB*, og lad *DB* være dragen; lad der være afsat et Kvadrat *EFGH*, hvor Siden er lig *DB*, lad der fra *E*, *F*, *G* og *H* være trukket *EK*, *FL*, *GM* og *HN* vinkelret paa Kvadrat *EFGH*'s Plan, lad der paa *EK*, *FL*, *GM* og *HN* være afskaaret henholdsvis *EK*, *FL*, *GM* og *HN* ligestore med een af Linierne *EF*, *FG*, *GH* og *HE*, og lad *KL*, *LM*, *MN* og *NK* være dragne. Saa er der konstrueret en Tærning *FN*, indesluttet af sex ligestore Kvadrater.

Man skal da ogsaa omslutte den med en given Kugle og bevise, at Kuglens Diameter i Potens er tre Gange Tærningens Side.

Lad nemlig *KG* og *EG* være dragne. Da nu $\angle KEG$ er ret, fordi *KE* er vinkelret paa Plan
XI D.3 *EG* og aabenbart ogsaa paa den rette Linie *EG*, saa vil den Halvcirkel, som kan tegnes paa
KG, gaa gennem Punkt *E*. Da endvidere *GF* er vinkelret paa hver af Linierne *FL* og *FE*, saa
XI 4 er *GF* ogsaa vinkelret paa Plan *FK*. Følgelig vil *GF*, hvis vi droge *FK*, ogsaa være vinkelret
paa *FK*, og derfor vil paa den anden Side der Halvcirkel, som kan tegnes paa *GK*, ogsaa gaa gennem *F*. Paa samme Maade vil den ogsaa gaa gennem Tærningens øvrige Punkter. Naar saa, idet *KG* staar fast, Halvcirklen føres rundt, indtil den vender tilbage igen til det Sted, hvorfra den begyndte, vil Tærningen være omsluttet af en Kugle. Jeg siger saa ogsaa, at det er den givne. Thi da $GF = FE$, og Vinkelen ved *F* er ret, saa er $\square EG$ $2\square EF$. Og $EF = EK$. Altsaa er $\square EG$ $2\square EK$. Følgelig er $\square GE + \square EK$, det vil sige $\square GK$ $3\square EK$. Da nu *AB* er $3BC$, og $AB/BC = \square AB/\square BD$, saa er $\square AB$ $3\square BD$. Desuden blev det bevist, at $\square GK$ er $3\square KE$. Og *KE* er afsat lig *DB*. Altsaa er $KG = AB$. Og *AB* er den givne Kugles Diameter. Altsaa er *KG* lig den givne Kugles Diameter.

Altsaa er Tærningen omsluttet af den givne Kugle, og med det samme er bevist, at Kuglens Diameter i Potens er tre Gange Tærningens Side; h. s. b.«

4 Konstruktion og størrelse af de regulære polyedre hos Euklid

Hos Euklid konstrueres de fem regulære polyedre i bog XIII:

XIII.13	Tetraeder
XIII.14	Oktaeder
XIII.15	Kube (terning)
XIII.16	Ikosaeder
XIII.17	Dodekaeder

4.1 Sidelængder

Efter hver af de tre første konstruktioner (XIII.13–XIII.15) afslutter Euklid med at relatere sidelængden i polyedret til radius i den omskrevne kugle. Dette udtrykkes for eksempel for tetraederet ved "Kuglens Diameter i Potens er halvanden Gange Pyramidens Side" (XIII.13). Det, der derved menes er (idet s betegner sidelængden i tetraederet og d diameteren i den omskrevne kugle):

$$d^2 = \frac{3}{2}s^2.$$

På grundlag af disse relationer kan man opstille følgende tabel over forholdet mellem sidelængderne og diametrene:

Tetraeder	$d^2 = \frac{3}{2}s^2$
Oktaeder	$d^2 = 2s^2$
Terning	$d^2 = 3s^2$
Ikosaeder	$s =$‹mindre›(‹minor›)
Dodekaeder	$s =$‹afsnit›(‹apotome›)

De "højere" irrationale forhold mellem sidelængder og diameter i ikosaeder og dodekaeder benævnes (som vist) med egne navne.

Hvis man forestiller sig alle de regulære polyedre indskrevet i samme kugle med radius $r = 1$ finder man følgende tabel:

Tetraeder	$s = \frac{2}{3}\sqrt{6}$
Oktaeder	$s = \sqrt{2}$
Ikosaeder	$s = \frac{1}{5}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}$
Terning	$s = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

4.2 Volumen

For legemer bestående af ligesidede trekanter (tetraeder, oktaeder, ikosaeder) finder man ved to gange at benytte Pythagoras' sætning på passende retvinklede trekanter:

$$\begin{aligned} x &= \text{radius i den om fladen omskrevne cirkel} \\ &= \frac{s}{\sqrt{3}}, \text{ og} \\ h &= \text{højde} = \text{radius i den i legemet indskrevne kugle} \\ &= \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{s^2}{3}}. \end{aligned}$$

Ved hjælp af Heron's formel til beregning af trekanters areal finder man let for ligesidede trekanter

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}s\left(\frac{3}{2}s-s\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{2^3}s^4} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2,$$

og legemets volumen beregnes som følger:

$$\begin{aligned} V_n &= n \times \frac{1}{3}A_n h_n = \frac{n}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\sqrt{1-\frac{s^2}{3}} \\ &= \frac{n}{4\sqrt{3}}s^2\sqrt{\frac{3-s^2}{3}} = \frac{n}{12}s^2\sqrt{3-s^2}. \end{aligned}$$

For terningen finder man naturligvis direkte

$$V_6 = s_6^3,$$

og man bemærker, at kuglens volumen er

$$V_K = \frac{4}{3}\pi \simeq 4,1888.$$

Dermed kan man opstille følgende tabel over volumen af de fire første regulære polyedre indskrevet i samme kugle med radius $r = 1$:

n	Navn	s_n	V_n	$V_n \simeq$
4	Tetraeder	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$	$\frac{8}{27}\sqrt{3}$	0.5132
8	Oktaeder	$\sqrt{2}$	$\frac{4}{3}$	1.3333
20	Ikosaeder	$\frac{1}{5}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{2\sqrt{5}+5}$	2.5362
6	Terning	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\frac{8}{9}\sqrt{3}$	1.5396

(1)

5 Tilordning af regulære polyedre til elementerne hos Timaios

Timaios tildeler regulære polyedre til de fire elementer ild, luft, vand og jord i en passage Platon, 1955, ss. 69–70, som vi skal vende tilbage til. Først argumenteres imidlertid for eksistensen af de to ekstreme elementer, ild og jord. Dernæst argumenteres for nødvendigheden af to forbindende elementer, idet legemerne er *rumlige*. Disse to forbindende elementer kræves at være sammenhængende mellemproportionale:

> "Derfor anbragte Gud Vand og Luft imellem Ild og Jord og gjorde dem saa vidt muligt proportionale med hinanden, saa at Luft forholder sig til Vand som Ild til Luft, og Vand forholder sig til Jord som Luft til Vand" Platon, 1955, s. 42

Man kunne forestille sig, at disse sammenhængende mellemproportionaler faktisk var realiseret af de regulære polyedres volumen indskrevet i samme kugle, men som det fremgår af tabellen (1), er dette ikke tilfældet. I stedet kan det *måske* tages som et udtryk for, hvor store *mængder* af hvert stof, der forekommer i universet.

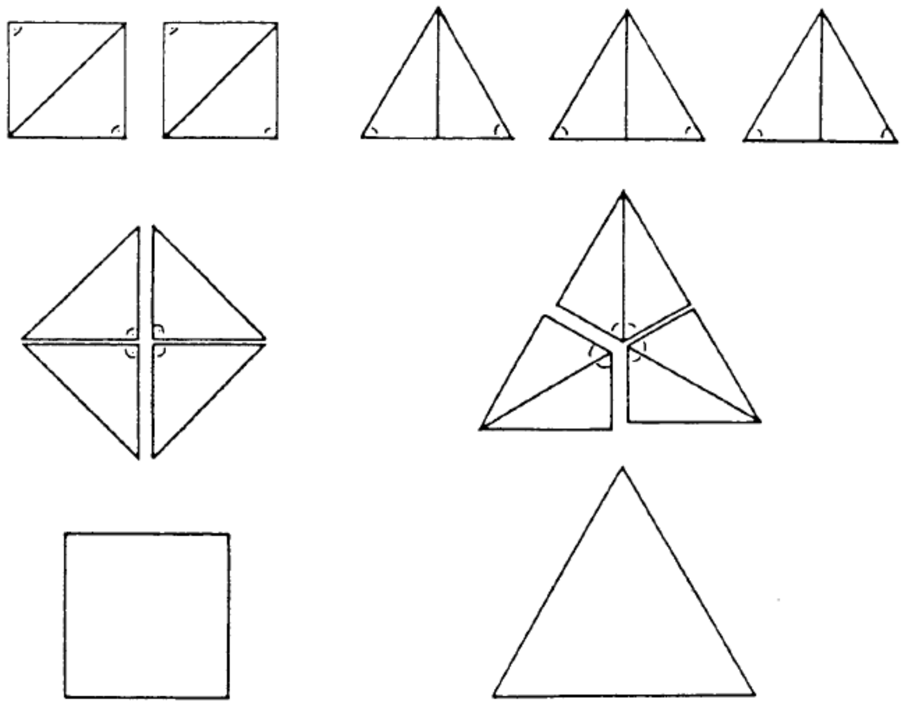
Idet han når til at tildele de regulære polyedre til hver sit element kommer hans argumentation til i høj grad at bygge på geometriske overvejelser. Timaios fremsætter en tiltalende *teori*, ifølge hvilken alle fladerne i de regulære polyedre er opbygget af to specielt pæne retvinklede trekanter, nemlig halvdelen af et kvadrat og halvdelen af en ligesidet trekant. Siderne i de regulære polyedre opbygges da af henholdsvis 4 halve kvadrater, som sammenstilles til at give et kvadrat, og 6 halve ligesidede trekanter, som sammenstilles til at give en ny ligesidet trekant (se figur 2). Hvorfor Timaios ikke blot sammenføjer *to* af hver af de elementære trekanter er ikke klart, men måske kan det skyldes at symmetrien forøges (med 3 hhv. 2 rotationer) ved den anvendte konstruktion.

Præcist, hvorfor disse trekanter er så pæne argumenteres der ikke udtrykkeligt for. Men som Artmann og Schäfer (1993) påpeger, forholder vinklerne i disse basale trekanter sig henholdsvist som $1 : 1 : 2$ og $1 : 2 : 3$, hvilket går godt i tråd med Pythagoras' lære om harmoniske forhold (forhold mellem små naturlige tal) i naturen.

I forbindelse med tilordningen af regulære polyedre til de fire elementer, starter Timaios med elementet jord, som han tilordner terningen:

> "Jord vil vi give den kubiske Figur, for af de fire Slags er Jord den mest ubevægelige og den mest plastiske, og den Figur, der bedst svarer til denne Beskrivelse, maa være den, der har de mest stabile Flader." Platon, 1955, ss. 69–70

Derefter tilordnes de legemer, hvis flader er sammensat af halve ligesidede trekanter, efter tre kriterier: bevægelighed, størrelse, og "spidshed". Bevægelighed måles med antallet af flader, således at



Figur 2: Artmann og Schäfer, 1993, figur 1, p. 259.

det mest bevægelige legeme er det, der har færreste antal flader, og det gør den også til den spidseste. TIMAIOS ordner altså legemerne efter tre kriterier:

Mest bevægelige	Mest spidse	Mindste
Ild (tetraeder: 4 flader)	Ild	Ild
Luft (oktaeder: 8 flader)	Luft	Luft
Vand (ikosaeder: 20 flader)	Vand	Vand

Hvilket mål, der er anlagt til polyedrenes størrelse, fremgår ikke direkte, men illustreres af følgende tabel byggende på (1), som angiver volumen af de forskellige polyedre indskrevet i en fælles kugle med radius 1:

Navn	Element	Volumen
Tetraeder	ild	0.5132
Oktaeder	luft	1.3333
Terning	jord	1.5396
Ikosaeder	vand	2.5362

5.1 Dodekaederet

Om dodekaederet konstaterer TIMAIOS blot efter konstruktionen af de fire første regulære polyedre:

> "Tilbage var endnu een Konstruktion, den femte, og den brugte Gud til Verdensaltets Kugle og tegnede Billeder paa den." Platon, 1955, s. 69

De tegnede billeder referer til stjernebillederne, og det er muligt, at man har benyttet en inddeling af himmelkuglen i 12 pentagonale afsnit Platon, 1955, fodnote 3, 69. Det eneste andet tidspunkt[3] formen optræder på i PLATON's skrifter i er dialogen *Faidon*, hvor SOKRATES udtaler:

[3] Som jeg har kunnet finde.

> "Sokrates: Det fortælles nu for det første, at den virkelige Jord set fra oven ser ud som en af de Bolde, der er syet sammen af tolv Stykker Læder [...]" Platon, 1954, s. 231

Således ser forbindelsen til æteren ud til at være knyttet senere.

6 Sammenblanding af *det udelelige* og *det delelige* hos Timaios

6.1 Proportionerne

Timaios konstruerer to serier af hele tal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & & & 9 & \\ 8 & & & & & & 27 \end{array}$$

Ud fra den samlede serie af led fordeler Timaios så portioner af blandingen af *det udelelige* og *det delelige*.

> "Dernæst udfyldte han baade de dobbelte og de tredobbelte Intervaller, idet han stadig skar Portioner af Blandingen og anbragte dem imellem Leddene, saa at der i hvert Interval blev to Mellemled: ved det ene var Forskellen mellem Mellemleddet og de to Yderled een og samme Del af henholdsvis første og sidste Yderled, ved det andet var Forskellen mellem Mellemled og de to Yderled det samme Tal. Disse Led fremkaldte Intervaller paa $\frac{3}{2}$ og $\frac{4}{3}$ og $\frac{9}{8}$ indenfor de oprindelige Intervaller. Intervallerne paa $\frac{4}{3}$ udfyldte han allesammen med Intervallet paa $\frac{9}{8}$, saadan at der i hvert af dem blev en Brøkdel tilbage. Det tiloversblevne Interval, der dannedes af Brøkdelen, fandt sit Udtryk i Talforholdet $\frac{256}{243}$." Platon, 1955, ss. 45–46

I serien af *dobbelte intervaller* indsættes så harmoniske (hm) og aritmetiske midler (am) på følgende måde[4]:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \text{hm} & \text{am} & 2 & \text{hm} & \text{am} & 4 & \text{hm} & \text{am} & 8 \\ & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & & \frac{8}{3} & 3 & & \frac{16}{3} & 6 & \end{array}$$

og tilsvarende for de *tredobbelte intervaller*:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \text{hm} & \text{am} & 3 & \text{hm} & \text{am} & 9 & \text{hm} & \text{am} & 27 \\ & \frac{3}{2} & 2 & & \frac{9}{2} & 6 & & \frac{27}{2} & 18 & \end{array}$$

Dermed opstår to nye serier, hvor jeg under serierne angiver forholdene mellem det pågældende og det foregående led:

$$\begin{array}{rcccccccccc} \textit{dobbelte intervaller}: & 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{8}{3} & 3 & 4 & \frac{16}{3} & 6 & 8 \\ & & \frac{4}{3} & \frac{9}{8} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{9}{8} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{9}{8} & \frac{4}{3} \\ \textit{tredobbelte intervaller}: & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 & \frac{9}{2} & 6 & 9 & \frac{27}{2} & 18 & 27 \\ & & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \end{array}$$

Intervallerne af $\frac{4}{3}$ udfyldes da med intervaller af $\frac{9}{8}$, men som udregningen

$$\frac{4}{3} = \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{256}{243}$$

[4]De harmoniske og aritmetiske midler er givet ved

$$hm(a,b) = \frac{2ab}{a+b} \text{ og } am(a,b) = \frac{a+b}{2}.$$

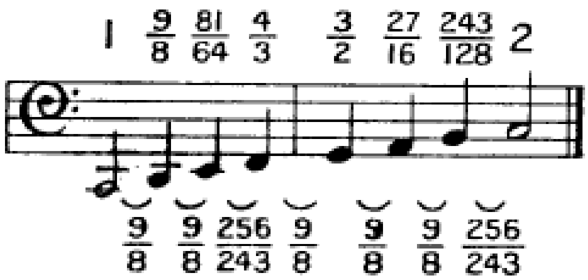
viser, bliver der et interval af $\frac{256}{243}$ til overs. I starten af serien af dobbelte intervaller giver dette for eksempel:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & & & 2 \\ & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{256}{243} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{256}{243} & \end{array},$$

hvorefter mønsteret gentager sig ialt tre gange.

TIMAIOS forklarer ikke, hvordan de tredobbelte intervaller skal udfyldes, men det kan man se rekonstrueret i Plato, 1952, fodnote 1, 68–71, hvorfra også ovenstående er hentet.

De fremkomne forhold mellem naturlige tal har en klar inspiration fra musikteorien (harmonilæren), idet forholdet $\frac{4}{3}$ svarer til *kvarten*, $\frac{3}{2}$ til *kvinten* og $\frac{2}{1}$ til *oktaven*. Endvidere har den ved intervallet mellem kvart og kvint til samme grundtone givne heltone (svarende til $\frac{9}{8}$) også anvendelse i musikteorien, hvorved også forholdet $\frac{256}{243}$ dukker op som halvtone, se f.x. Platon, 1955, fodnote 1, 45 eller Cornford, 1937, ss. 71–72, hvorfra figur 3 er hentet:



Figur 3: Cornford, 1937, s. 72.

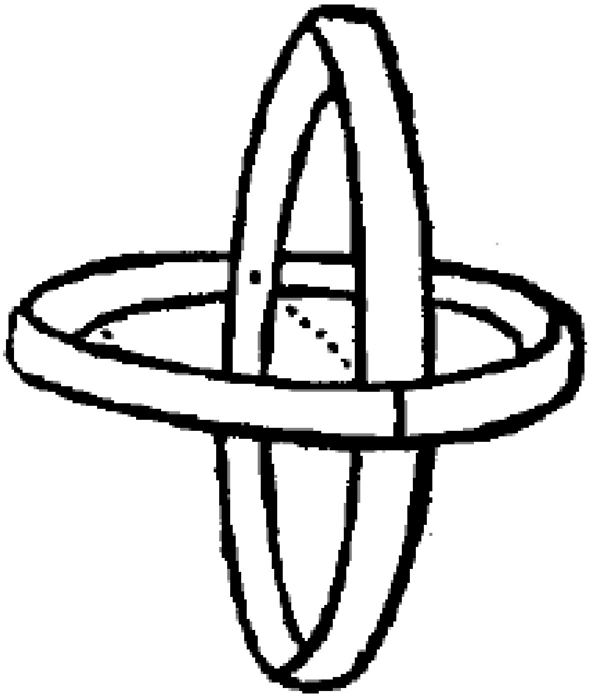
6.2 Verdensbilledet

De to bånd, som TIMAIOS deler blandingen i ledsages af følgende bemærkninger indeholdt i fodnoter i den engelske udgave.

> "The accompanying figure [figur 4] indicates how the two strips were applied to each other. The place where they originally laid together across each other is, in the diagram, on the further side, and is marked by a dot; the place where the two ends of each band are joined together, and where the two bands are themselves again joined together is, in the diagram, on the near side, and is indicated by a line on the outer band. The second place of meeting is, as the dotted line indicates, immediately opposite to the first.
>
> The outer band, as Timaeus goes on to say, is the Revolution of the Same, and the inner the Revolution of the Other." Plato, 1952, fodnote 1, 71

> "He now tilts the inner band, so that it makes an oblique angle with the outer, which is set at the horizontal; from which we see that the Revolution of the Same represents the celestial Equator, moving 'hotizontally to the right' (from East to West), and the Revolution of the Other represents the Ecliptic, which moves in a contrary direction to the Equator (from West to East), and at an angle to it. The Ecliptic He divides into seven, to represent the seven planets." Plato, 1952, fodnote 1, 72

Divisionen i syv cirkler følger forholdene listet i de dobbelte og tredobbelte intervaller: $2, 3, 4, 8, 9, 27$. Tre af cirklerne, repræsenterende Solen, Venus og Merkur, skal dreje med samme hastighed, mens de øvrige fire (Månen, Mars, Jupiter og Saturn) skal dreje med hastigheder, der indbyrdes og i forhold



Figur 4: Plato, 1952, fodnote 1, s. 71.

til de tre første er forskellige, men rationalt relaterede. PLATON (TIMAIOS) uddyber sine ideer senere Platon, 1955, ss. 49–51, se Cornford, 1937, ss. 105–117.

For KEPLER's anvendelse af PLATON's ideer og *Timaios*, se Field, 1988, ss. 1–16.

Litteratur

Artmann, Benno og Lothar Schäfer (1993). „On Plato's "Fairest Triangles" (*Timaios* 54a)". *Historia Mathematica*, bd. 20, nr. 3, ss. 255–264.

Charrak, André (2005). „The Mathematical Model of Creation According to Kepler". I: *Mathematics and the Divine: A Historical Study*. Udg. af T. Koetsier og L. Bergmans. Amsterdam etc.: Elsevier. Kap. 19, ss. 361–374.

Cornford, Francis Macdonald, red. (1937). *Plato's Cosmology. The Timaeus of Plato translated with a running commentary*. London: Kegan Paul, Trench, Trubner & Co. Ltd.

Duhem, P. (1976). „Plato's theory of space and the geometrical composition of the elements". I: *The Concepts of Space and Time*. Udg. af Milič Čapek. Bd. 22. Boston Studies in the Philosophy of Science. Dordrecht, NL og Boston (Mass.): D. Reidel Publishing Company, ss. 21–25.

Euclid (1956). *The Thirteen Books of The Elements*. Udg. af Thomas L. Heath. 2. udg. 3 bdd. New York: Dover Publications.

Euklid (1897–1912). *Euklids Elementer*. Overs. af T. Eibe. 6 bdd. København: Nordisk Forlag.

Field, J. V. (1988). *Kepler's Geometrical Cosmology*. Chicago: The University of Chicago Press.

Johansen, Thomas Kjeller (2004). *Plato's natural philosophy: A study of the* Timaeus-Critias. Cambridge: Cambridge University Press.

Katz, Victor J. (1998). *A History of Mathematics. An Introduction*. 2. udg. Reading (Mass.) etc.: Addison-Wesley.

— (2014). *A History of Mathematics*. 3. udg. Harlow: Pearson Education.

Plato (1952). „Timaeus“. I: *The works of Plato*. Udg. af T. E. Page m.fl. Bd. 7. 12 bdd. The Loeb Classical Library. Cambridge, Massachusetts og London: Harvard University Press og William Heinemann, ss. 17–253.

Platon (1953–1955). *Platons Skrifter*. Udg. af C. Høeg og H. Ræder. 10 bdd. København: C. A. Reitzels Forlag.

— (1954). „Faidon“. I: *Platons Skrifter*. *Platons Skrifter*. Udg., overs. og indl. af William Norvin. 10 bdd. København: C. A. Reitzels Forlag, ss. 163–239.

— (1955). „Timaios“. I: *Platons Skrifter*. *Platons Skrifter*. Udgivet og med en indledning skrevet af Carsten Høeg. Overs. af Povl Johs. Jensen. 10 bdd. København: C. A. Reitzels Forlag, ss. 7–112.

— (2013). „Timaios“. I: *Samlede værker i ny oversættelse*. Udg. af Jørgen Mejer og Chr. Gorm Tortzen. Overs. m. indl. af Thomas Kjeller Johansen. Bd. 4. 6 bdd. København: Gyldendal, ss. 525–632.

Schoot, Albert van der (2001). „Kepler’s search for form and proportion“. *Renaissance Studies*, bd. 15, nr. 1, ss. 59–78.

Zeyl, Donald (2009). „Plato’s Timaeus“. I: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Udg. af Edward N. Zalta. Spring 2009.